Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1979

MATEMATIK 224

2 timers skriftlig opgave.
Lommeregnere og alle hjælpemidler i øvrigt må medbringes.

Minimumskrav for at bestå er rigtig besvarelse af 3 spørgsmål, samt halvdelen af residueregningsopgaven. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret, men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Hver alternativ opgave regnes ækvivalent med $\frac{3}{4}$ af opgaven i residueregning.

Spørgsmål.

1°. Angiv, hvor den ved $\sin\frac{1}{\pi z} - \frac{1}{\sin \pi z}$ definerede funktion har poler og væsentlige singulariteter i $\mathbb{C}$. Angiv polernes multiplicitet, samt residuerne i alle singulariteterne.

2°. Den ved $f(z) = \sin z - \frac{1}{3} z(2 + \cos z)$ definerede funktion har et nulpunkt i 0. Angiv dets multiplicitet.

3°. Find residuet i 0 af den ved $(z^2+\sin z)^{-2}$ definerede funktion.

4°. Angiv værdien af $\int_{\Gamma} \frac{\sinh \pi z}{4z^2+1}\, dz$, idet Γ er enhedscirklen gennemløbet mod uret.

(Opgavesættet fortsættes)

Alternative spørgsmål.

1a. Udregn $\int_\Gamma z^{-n}\sin z\, dz$, idet n er et naturligt tal, og Γ er enhedscirklen gennemløbet mod uret.

2a. Find residuet i ∞ af $\frac{2z^8+1}{3z^9+1}$.

—— + | + ——

Opgave i residueregning.

Udregn $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha}$ for $\alpha \in]1,\infty[$. Råd: For $\theta \in [0,2\pi[$, $r > 0$, $z = re^{i\theta}$ defineres $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ og $f(z) = \frac{1}{1+z^\alpha}$. Betragt $\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^\alpha}$, idet Γ er randen af cirkeludsnittet

$$\{z = re^{i\theta} \mid r \in [0,R],\ \theta \in [0, \tfrac{2\pi}{\alpha}]\}.$$

(Egentlig burde 0 skæres væk med en lille cirkelbue, men det er uden betydning, da f er kontinuert i 0 med $f(0) = 1$).

Alternative opgaver.

3a. Vis, at $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n^2}$ definerer en i hele $\mathbb{C}$ meromorf funktion med poler i punkterne n^2, $n \in \mathbb{N}$ og kun i disse punkter.

(Opgaven fortsættes)

4a. Lad n være et naturligt tal og Γ en cirkel i $\mathbb{C}$ med centrum 0 og radius > 1. I nedenstående regning beror det første lighedstegn på formlen for den k'te koefficient i en potensrække specielt anvendt på binomialformlen. Giv tilsvarende forklaringer på berettigelsen af de andre 7 lighedstegn i regningen (lighedstegn nr. 2 beror på ret simple manøvrer med integraltegn, og det må gerne forbigås i tavshed).

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\, dz \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(1+w)^n}{w^{k+1}}\, dw \right) =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{k=0}^{n} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{((1+z)(1+w))^n}{z^{k+1} w^{k+1}}\, dz dw =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \int_\Gamma ((1+z)(1+w))^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(zw)^{k+1}}\, dz dw =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{((1+z)(1+w))^n}{zw-1}\, dw dz = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left(\int_\Gamma \frac{((1+z)(1+w))^n}{z\,(w-\frac{1}{z})}\, dw \right) dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{((1+z)(1+1/z))^n}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}\, dz = \binom{2n}{n} .$$