

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1978

## MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Alle hjælpemidler er tilladt.

## Opgave nr. 1

Lad  $f$  være holomorf (komplekst differentiabel) i den komplekse plan minus  $0$  ( $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Antag singulariteten for  $f$  i  $0$  er essentiell.

Lad  $g$  være holomorf (komplekst differentiabel) i  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  og antag at for alle  $z \neq 0$  gælder  $|g(z)| \leq |f(z)|$ .

Bevis, at  $g$  er enten identisk  $0$  eller har essentiel singularitet i  $0$ !

## Opgave nr. 2

Lad  $h$  være en holomorf (komplekst differentiabel) afbildning af den åbne enhedsskive

$$D(0,1) = \{z \mid |z| < 1\}$$

ind i sig selv.

Antag, at der findes  $\delta$  med  $0 < \delta < 2$  således at

$$\sup\{|h(z)+z| \mid z \in D(0,1)\} \leq \delta < 2.$$

(Opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

Vis, at der findes et fixpunkt for  $h$  dvs. et  $z_0 \in D(0,1)$  med  $h(z_0) = z_0$ .

Vink: Vis at funktionerne  $2z$  og  $z-h(z)$  har samme antal nulpunkter indenfor en cirkulær vej med centrum i  $0$  og radius "lidt" mindre end  $1$ .

Opgave nr. 3

Find værdien af integralerne

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin^2(x)/(1+x^2)) dx$$

samt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos^2(x)/(1+x^2)) dx .$$

Vink: For at kunne udnytte en hensigtsmæssig sætning kan det være klogt at betragte hjælpefunktionerne  $\exp(i2z)/(1+z^2)$  og  $1/(1+z^2)$ .