Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1977

Matematik 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1.

Lad f være en holomorf (komplekst differentiabel) kompleks funktion defineret på den udprikkede cirkelskive

$$D'(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0<|z|<1\} .$$

Lad os antage at singulariteten af f i punktet 0 er essentiel. Lad g være en ikke konstant kompleks differentiabel funktion defineret på f's værdimængde G, som vi jo ved er både åben og tæt i $\mathbb{C}$ (ønskes ikke vist).

Vis, at den sammensatte funktion $h=g \circ f$ har essentiel singularitet i 0.

Vink: Man kan søge under anvendelse af Casorati-Weierstrass sætning, at vise, at for ethvert w i g's værdimængde findes en følge $z_n \in D'(0,1)$ så $z_n \to 0$ og $h(z_n) \to w$.

Opgave nr. 2.

Lad f være en holomorf (komplekst differentiabel) kompleks funktion på den åbne enhedscirkelskive

$$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\} .$$

Lad os antage at f afbilder $D(0,1)$ ind i sig selv. Bevis, at $\inf\{|f(z)-z| \mid z \in D(0,1)\} = 0$, men at dette infimum ikke nødvendigvis antages i noget punkt i $D(0,1)$, d.v.s. ligningen $f(z)=z$ har ikke nødvendigvis en løsning i $D(0,1)$.

Vink: Man kan forsøge at anvende Rouché's sætning på følgen $g_n(z)=z-((n-1)/n)f(z)$ og vejen $C(0,(2n-1)/(2n))$. Som modeksempel kan bruges $f(z)=(z-a)/(1-\bar{a}z)$. Husk begrundelse! Hvor skal a ligge ?

Opgave nr. 3.

Lad $a > 0$. Vis at nedenstående integral er konvergent og find dets værdi

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-i)^{-1} \exp(iax)\,dx \quad .$$

Vink: Desværre er der en fejl i formuleringen af den sætning i Jameson, som er egnet til anvendelse i denne opgave. Der er gjort opmærksom på ved forelæsningerne at f (i sætningens formulering) må forudsættes reel for at den anførte variant af sætningen har gyldighed. Dette har dog ingen betydning for løsningen af nærværende opgave, beviset giver eksistensen og værdien af $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ (med sætningens betegnelser).

Husk, at gøre rede for at forudsætninger for anvendelse af en egnet sætning er opfyldt.

Generelle bemærkninger: Meningen med vinkene er at kompensere for den forholdsvis korte tid. Det er ikke nok at afskrive vinkene, der kun er en ramme hvis udfyldelse kan blive til en tilfredsstillende besvarelse. Det er vigtigt, at man husker at begrunde fremsatte påstande. Andre metoder end de i vinkene antydede accepteres gerne, såfremt besvarelsen ellers er tilfredsstillende.