KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1976.

MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Idet $t \in \mathbb{R}$ er et reelt tal skal man finde værdien af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{itx} dx$$

samt begrunde dets konvergens.

Husk at gøre rede for, at forudsætningerne for en egnet formel er opfyldte.

Opgave 2.

Lad f være en kompleks funktion som er kontinuert på

$$\overline{D(0,1)} - \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\},$$

og som afbilder denne mængde ind i sig selv. Lad det end-

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

videre være givet, at $|f(z)| = 1$ for $|z| = 1$ (enhedscirkelringen afbildes i sig selv). Vi forudsætter endelig at f er holomorf (komplekst differentiabel) i den udprikkede cirkelskive

$$D(0,1) - \{0\} = \{z \in C \mid 0 < |z| < 1\}.$$

Vis, at f har formen

$$f(z) = a\, z^n$$

hvor $|a| = 1$ og n er et helt ikke negativt tal.

Vink: Gør først rede for, at f har en hævelig singularitet i 0 og lad $n \geqq 0$ være ordenen af f i 0. Vis derefter ved hjælp af maksimumsprincippet, at hjælpefunktionen $g(z) = \frac{f(z)}{z^n}$ er konstant i $D(0,1)$.

Opgave 3.

Lad f være en holomorf (komplekst differentiabel) kompleks funktion defineret på den udprikkede cirkelskive

$$D'(0,1) = \{z \in C \mid 0 < |z| < 1\},$$

og antag $f(z) \neq 0$ for alle $z \in D'(0,1)$. Så er den

(opgaven fortsættes)

(opgave 3 fortsat)

logaritmisk afledede $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ af f holomorf i $D'(0,1)$.

1° Vis at hvis h har en hævelig singularitet i 0, så har f også en hævelig singularitet i 0 og $f(0) \neq 0$.

Vink: Gør rede for, at h har en stamfunktion k i hele $D(0,1)$ og at funktionen $f(z)\exp(-k(z))$ er konstant i $D'(0,1)$.

2° Vis at hvis h har en simpel pol i 0 med heltalligt residuum n så har f en ikke essentiel singularitet i 0 og ordenen af f i 0 er n (n negativ for 0 en pol og positiv for 0 et nulpunkt).

Vink: Anvend 1° på hjælpefunktionen $g(z) = \frac{f(z)}{z^n}$.

-------------------------- 0 --------------------------

Generelle bemærkninger:

Vinkene udgør kun en ramme, hvis udfyldelse kan blive en tilfredsstillende besvarelse. Afskrift af vinket er ikke nok. Henvisning til benyttede sætninger er ønskelig, men kan undværes, hvis det fremgår hvilken sætning, der benyttes.

Andre metoder end de i vinkene antydede accepteres gerne, hvis besvarelsen ellers er korrekt.