KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1975.

MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Opgave 1.

Lad f være en kontinuert kompleks funktion defineret på mængden $\{z \mid |z| \geq 1\}$. Antag f er holomorf i ringområdet $R(0,1,\infty) = \{z \mid |z| > 1\}$ og at $f(z) = 0$ for $|z| = 1$. Bevis at f er identisk lig 0.

Vink: Man kan benytte Laurentrækkefremstillingen $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^m$ i ringområdet $R(0,1,\infty)$. I integralformlen

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} (f(z)/z^{n+1})dz \qquad (r > 1)$$

foretages en passende grænseovergang.

Opgave 2.

Find værdien af integralerne

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+x+1)^{-1} dx$$

og

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2-x+1)^{-1} dx.$$

(Opgaven fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1975.
Matematik 224.

Vink: Man kan godtgøre at forudsætningerne for at anvende formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} (P(x)/Q(x))dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(P/Q,a)$$

er tilstede.

Opgave 3.

Lad f være en holomorf funktion defineret på en åben sammenhængende mængde $G \subseteq \mathbb{C}$. Antag at f kun har reelle værdier på randen $\partial K = K \setminus \mathring{K}$ af en kompakt mængde $K \subseteq G$ med ikke tomt indre $\mathring{K}$. Bevis at f er en reel konstant på G!

Vink: Hjælpefunktionerne $g(z) = \exp(if(z))$ og $h(z) = \exp(-if(z))$ betragtes. Beviset kan føres indirekte ved anvendelse af maksimumsprincippet på disse to funktioner.

Vinkene antyder kun en af måske flere mulige metoder. Afskrift af vinkene er ikke nok. En tilfredsstillende besvarelse kræver en forståelig begrundelse. Vinkene er kun en ramme hvis udfyldelse kan blive en tilfredsstillende besvarelse.