Københavns Universitet
Matematik 223
Sommeren 1981

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1981

Matematik 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.
Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Opgave 1. (Omtrentlig vægt 75%.)

Lad $\overrightarrow{OA} = \underline{a}(u)$, $u \in I$, være naturlig parameterfremstilling for en fire gange differentiabel kurve k, hvis krumning κ er forskellig fra 0 i hvert punkt. Krumningsradius betegnes ρ, torsionen τ, og enhedsvektorerne på tangent T, hovednormal N og binormal B betegnes $\underline{t}$, $\underline{n}$ og $\underline{b}$.

1^0 Opskriv Frenets formler, uden begrundelse.

2^0 Tegn en skitse, der foruden et stykke af kurven k viser $\underline{t}$, $\underline{n}$ og $\underline{b}$ i et punkt A på k, kurvens krumningscentrum C i A og den rette linie l gennem C parallel med $\underline{b}$.

Når A gennemløber k, beskriver l en flade F. Stedvektoren til et vilkårligt punkt $P = P_{u,v}$ på fladen F kan skrives

$$\overrightarrow{OP} = \underline{r}(u,v) = \underline{a} + \rho\underline{n} + v\underline{b} = \underline{a}(u) + \rho(u)\underline{n}(u) + v\,\underline{b}(u) .$$

3^0 Gør rede for, at $\overrightarrow{OP} = \underline{r}(u,v)$, $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$, er parameterfremstilling for en to gange differentiabel flade. (Her og i det følgende ses bort fra punkter $P_{u,v}$, hvor $\frac{d\rho}{du} = \tau v$.)

4^0 Karakteriser tangentplanen til fladen F i $P_{u,v}$ så simpelt som muligt ud fra kurven k.

Opgaven fortsættes

Binormaldrejningen for k, svarende til et udgangspunkt A_{u_0} på k, betegnes med β. Idet vi antager $\tau > 0$ og indskrænker os til et interval $J \subseteq I$ af u-værdier, hvor $-\frac{\pi}{2} < \beta = \beta(u) < \frac{\pi}{2}$, betragtes kurven h givet ved

$$u \sim Q = Q_u, \quad u \in J,$$

hvor Q ligger på l, og vinklen $\angle BAQ$ mellem binormalen B til k og AQ er $\frac{\pi}{2} + \beta$.

5^0 Vis, at kurven h i hvert punkt Q_u, som ikke er et undtagelsespunkt på fladen F (se 3^0), har en tangent, der går gennem A_u og er en normal til kurven k.

6^0 Vis, at h er en geodætisk kurve på fladen F.
Vink. Ud fra tangentenhedsvektor, som ifølge 5^0 er

$$\pm(\underline{n}\cos\beta - \underline{b}\sin\beta),$$

kan hovednormalen til h findes.

Opgave 2. (Omtrentlig vægt 25%.)

Terrænet omkring Høje Sandbjerg er afbildet på et kort. Afbildningen kan opfattes som en projektion på en vandret plan*) fulgt af en ligedannethed i forholdet 1/10000.

1^0 Gør rede for, at målestoksforholdet ved overgangen φ fra kortet til det bakkede terræn er større eller lig 10000 i enhver retning i ethvert punkt af kortet.

2^0 Gør rede for, at tangenten i et punkt P af en niveaukurve på kortet angiver en hovedretning for φ i P.

Vink. Undlad at indføre parameterfremstillinger, koordinatsystemer eller lignende.

*) Når der kun er tale om et beskedent område, kan man med Per Degn betragte Jorden som flak, uden mærkbar fejl.

To formelblade er vedhæftet

Kurver og flader i rummet.
Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f. eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f. eks. $\rho = |\rho_T| \cos\varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:

$$\underline{v} = r\omega\underline{N}, \qquad \underline{w} = -r\omega^2\underline{R} + r\omega'\underline{N}.$$

Strækningshastighed for liniestykke, $l = l(t) \neq 0$: $\quad \frac{dl}{dt} = \underline{e}\cdot\underline{v}_2 - \underline{e}\cdot\underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\quad \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\underline{R} + r\frac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Vinkelhastighed: $\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{|\underline{r}\times\underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}$.

Arealhastighed: $\quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}|\underline{r}\times\underline{r}'|$.

Opløsning af acceleration: $\quad \underline{w} = \frac{dv}{dt}\underline{t} + v\frac{d\theta}{dt}\underline{n} = \frac{dv}{dt}\underline{t} + v^2\varkappa\underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\quad \varkappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\quad \varkappa_0 = \frac{\varkappa\cos\varphi}{\cos^3\theta}$.

Torsion: $\quad \tau = \frac{[\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $\quad S = \int_\omega |\underline{r}'_u\times\underline{r}'_v|\, d(u,v) = \int_\omega \begin{vmatrix} E & F \\ F & G\end{vmatrix}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

Mat 223, 1975 formler 2

Krumning af normalsnit:

$$\varkappa_T = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

$$L = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}\cdot \underline{r}''_{u^2} = \frac{[\underline{r}'_u\,\underline{r}'_v\,\underline{r}''_{u^2}]}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad M = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{uv}, \quad N = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{v^2}.$$

Middelkrumning: $$H = \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2} = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}.$$

Krumningsmål: $$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}.$$

Differentialligning for krumningskurver:

$$(EM-FL)\,du^2 + (EN-GL)\,du\,dv + (FN-GM)\,dv^2 = 0.$$

Nye betegnelser: $$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Christoffel symboler: $$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^1\,\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^2\,\underline{r}'_2 + L_{ij}\,\underline{n},$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Sigma_{l=1}^2\, g^{kl}\,\Gamma_{ijl}, \qquad \Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij}\cdot\underline{r}'_l = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right).$$

Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^2\,\Gamma_{ij}^1(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^2\,\Gamma_{ij}^2(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0 \quad .$$

Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^2\,\Gamma_{ij}^1(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\,\xi^i = 0$$
$$\frac{d\xi^2}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^2\,\Gamma_{ij}^2(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\,\xi^i = 0 \quad .$$

Geodætisk krumning:

$$\varkappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(\Sigma_{i,j}\, g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right)^{3/2}}\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi^1}{dt} & \dfrac{d\varphi^2}{dt} \\ \dfrac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\,\Gamma_{ij}^1\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} & \dfrac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\,\Gamma_{ij}^2\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} \end{vmatrix}.$$

27.4.75, GM