Københavns Universitet
Matematik 223
Sommeren 1980

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1980

Matematik 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.
Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Lad O være et punkt på en to gange differentiabel flade.

Der vælges et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem XYZ med begyndelsespunkt O, således at XY-planen falder sammen med fladens tangentplan i O. Et stykke F af fladen omkring O kan da fremstilles

$$\overrightarrow{OP}_{x,y} = \underline{r}(x,y) = x\underline{i} + y\underline{j} + f(x,y)\underline{k}\ , \qquad (x,y) \in \Omega\ ,$$

hvor $f: \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}$ er en funktion af klasse $\mathcal{C}^2$, defineret på et område Ω i XY-planen, medens $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ er koordinatsystemets grundvektorer.

1^0 Opstil en ligning for tangentplanen i et vilkårligt punkt P_{x_0,y_0} på fladestykket F. Gør rede for, at

$$f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0\ .$$

2^0 Med κ_T betegnes krumningen i O af normalsnittet til F i O med tangentretning T i XY-planen. Udled en formel for κ_T udtrykt ved

$$r = f''_{x^2}(0,0)\ ,\ s = f''_{xy}(0,0)\ ,\ t = f''_{y^2}(0,0) \quad \text{og} \quad \theta = \angle(X,T)\ .$$

Opgaven fortsættes

3^0 Bestem arealforholdet i (x_0,y_0) for parameterfremstillingen $(x,y) \rightsquigarrow P_{x,y}$. Vis, at

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\underline{r}'_x \times \underline{r}'_y|}\right) \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\underline{r}'_x \times \underline{r}'_y|}\right)$$

begge er 0 i $(0,0)$. Beregn $\underline{n}'_x(0,0)$ og $\underline{n}'_y(0,0)$, hvor $\underline{n}$ er enhedsvektoren ensrettet med $\underline{r}'_x \times \underline{r}'_y$.

4^0 Giv definitionen på den sfæriske normalafbildning Φ af F. Opskriv koordinatfremstillingen for differentialet $d\Phi$ af Φ i O, idet $(\underline{i},\underline{j})$ benyttes som basis både for vektorer og for billedvektorer. Find Gauss' krumningsmål K for F i O.

Vink til 5^0: Antag koordinatsystemet valgt, så den i 2^0 udledte formel går over i Eulers formel

$$\kappa_T = \kappa_X \cos^2\theta + \kappa_Y \sin^2\theta ,$$

og vis da, at

$$\underline{n}'_x(0,0) = -\kappa_X \underline{i} \quad \text{og} \quad \underline{n}'_y(0,0) = -\kappa_Y \underline{j} .$$

5^0 Vis, at

$$K = \kappa_1 \kappa_2 ,$$

hvor κ_1 og κ_2 er hovedkrumningerne for F i O, medens krumningsmålet K for F i O tænkes indført ved Gauss' definition.

Vis, at tangentretningerne for hovednormalsnittene til F i O samtidig er hovedretninger i O for den sfæriske normalafbildning Φ af F.

Angiv største og mindste målestoksforhold for Φ i O.

Bestem egenværdier og egenvektorer for differentialet $d\Phi$ af Φ i O.

To formelblade er vedhæftet

Kurver og flader i rummet.
Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f. eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f. eks. $\varrho = |\varrho_T| \cos\varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\,\underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:

$$\underline{v} = r\omega\underline{N}, \qquad \underline{w} = -r\omega^2\underline{R} + r\omega'\underline{N}.$$

Strækningshastighed for liniestykke, $\ell = \ell(t) \neq 0$: $\quad \dfrac{d\ell}{dt} = \underline{e}\cdot\underline{v}_2 - \underline{e}\cdot\underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\quad \dfrac{d\underline{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\underline{R} + r\dfrac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Vinkelhastighed: $\quad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{|\underline{r}\times\underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}$.

Arealhastighed: $\quad \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{2}|\underline{r}\times\underline{r}'|$.

Opløsning af acceleration: $\quad \underline{w} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v\dfrac{d\theta}{dt}\underline{n} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v^2\varkappa\underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\quad \varkappa = \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\quad \varkappa_0 = \dfrac{\varkappa\cos\varphi}{\cos^3\theta}$.

Torsion: $\quad \tau = \dfrac{[\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $\quad S = \int_\omega |\underline{r}'_u\times\underline{r}'_v|\,d(u,v) = \int_\omega \begin{vmatrix} E & F \\ F & G\end{vmatrix}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

Krumning af normalsnit:

$$\varkappa_T = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} .$$

$$L = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}\cdot \underline{r}''_{u^2} = \frac{[\underline{r}'_u\,\underline{r}'_v\,\underline{r}''_{u^2}]}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad M = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{uv}, \quad N = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{v^2} .$$

Middelkrumning: $$H = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG-F^2)} .$$

Krumningsmål: $$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} .$$

Differentialligning for krumningskurver:

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0 .$$

Nye betegnelser: $$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} .$$

Christoffel symboler: $$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^{1}\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{2}\underline{r}'_2 + L_{ij}\underline{n} ,$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Sigma_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma_{ijl} , \qquad \Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij}\cdot\underline{r}'_l = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) .$$

Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{1}(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{2}(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0 .$$

Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{1}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0$$
$$\frac{d\xi^2}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{2}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0 .$$

Geodætisk krumning:

$$\varkappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(\Sigma_{i,j} g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right)^{3/2}} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi^1}{dt} & \dfrac{d\varphi^2}{dt} \\ \dfrac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^{1}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} & \dfrac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^{2}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} \end{vmatrix} .$$

27.4.75, GM