Københavns Universitet
Matematik 223
Sommeren 1979

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1979

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgave til besvarelse i 2 timer.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

En besvarelse regnes for fuldstændig, hvis 8 af de 9 spørgsmål er besvaret korrekt.

Lad $\overrightarrow{OA} = \underline{a}(u)$, $u \in I$, være naturlig parameterfremstilling for en fire gange differentiabel kurve *k*, hvis krumning κ er forskellig fra 0 i hvert punkt. Torsionen betegnes τ, og enhedsvektorerne på tangent T, hovednormal N og binormal B betegnes $\underline{t}$, $\underline{n}$ og $\underline{b}$.

1° Opskriv Frenets formler, uden begrundelse.

Når A gennemløber kurven *k*, beskriver binormalen B en flade F_1, der kaldes kurvens *binormalflade*. Stedvektoren til et vilkårligt punkt P på fladen kan skrives

$$\overrightarrow{OP} = \underline{r}(u,v) = \underline{a}(u) + v\,\underline{b}(u) .$$

2° Gør rede for, at $\overrightarrow{OP} = \underline{r}(u,v)$, $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$, er parameterfremstilling for et to gange differentiabelt fladestykke.

3° Beskriv parameterkurven svarende til et vilkårligt fastholdt u. Vis, at de to parameterkurver gennem et vilkårligt punkt $P = P_{u,v}$ på fladen skærer hinanden under ret vinkel.

4° Bestem binormalfladens tangentplan i et vilkårligt punkt A på kurven *k* og vis, at *k* er en geodætisk kurve på binormalfladen.

Opgaven fortsættes

5° Beregn Gauss' krumningsmål K i et vilkårligt punkt på binormalfladen. (Vink: Find først koefficienten N i anden fundamentalform.) - I hvilke punkter er fladen hyperbolsk, henholdsvis parabolsk krummet ?

- - - - - - - -

En kurve l er i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ givet ved

$$x = f(v) = \sqrt{1+v^2}\,, \quad y = 0\,, \quad z = h(v) = \log(v + \sqrt{1+v^2})\,, \quad v \in \mathbb{R}\,.$$

6° Vis, at parameterfremstillingen er naturlig.

7° Bestem fundamentalmatricen (eller første fundamentalform) for omdrejningsfladen F_2, der fremkommer ved, at kurven l drejes om Z-aksen. Som parametre benyttes drejningsvinklen u og kurveparameteren v.

- - - - - - - -

Fra nu af forudsættes, at den tidligere betragtede kurve k har længden 2π, og at dens torsion τ er konstant.

8° Antag her $|\tau| = 1$ og vis da, at binormalfladen F_1 for k kan bøjes på omdrejningsfladen F_2, således at k går over i enhedscirklen i XY-planen, og k's binormaler går over i meridiankurverne.

9° Antag her $|\tau| < 1$ og vis da, at binormalfladen F_1 for k kan bøjes på en omdrejningsflade.

To formelblade er vedhæftet

Kurver og flader i rummet.
Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f. eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f. eks. $\rho = |\rho_T| \cos\varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\,\underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:

$$\underline{v} = r\omega \underline{N}, \qquad \underline{w} = -r\omega^2 \underline{R} + r\omega' \underline{N}.$$

Strækningshastighed for liniestykke, $l = l(t) \neq 0$: $\quad \dfrac{dl}{dt} = \underline{e}\cdot\underline{v}_2 - \underline{e}\cdot\underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\quad \dfrac{d\underline{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\underline{R} + r\dfrac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Vinkelhastighed: $\quad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{|\underline{r}\times\underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}$.

Arealhastighed: $\quad \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{2}|\underline{r}\times\underline{r}'|$.

Opløsning af acceleration: $\quad \underline{w} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v\dfrac{d\theta}{dt}\underline{n} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v^2\varkappa\underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\quad \varkappa = \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\quad \varkappa_0 = \dfrac{\varkappa\cos\varphi}{\cos^3\theta}$.

Torsion: $\quad \tau = \dfrac{[\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $\quad S = \int_\omega |\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|\, d(u,v) = \int_\omega \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

Krumning af normalsnit:

$$\varkappa_T = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

$$L = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{[\underline{r}'_u\,\underline{r}'_v\,\underline{r}''_{u^2}]}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad M = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{uv}, \quad N = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{v^2}.$$

Middelkrumning: $$H = \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2} = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}.$$

Krumningsmål: $$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G\end{vmatrix}}.$$

Differentialligning for krumningskurver:

$$(EM-FL)\,du^2 + (EN-GL)\,du\,dv + (FN-GM)\,dv^2 = 0.$$

Nye betegnelser: $$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}.$$

Christoffel symboler: $$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^1\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^2\underline{r}'_2 + L_{ij}\underline{n},$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Sigma_{l=1}^2 g^{kl}\Gamma_{ijl}, \qquad \Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij}\cdot\underline{r}'_l = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right).$$

Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0.$$

Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0$$
$$\frac{d\xi^2}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0.$$

Geodætisk krumning:

$$\varkappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(\Sigma_{i,j} g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right)^{3/2}}\cdot\begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{dt} & \frac{d\varphi^2}{dt} \\ \frac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^1\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} & \frac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^2\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\end{vmatrix}.$$

27.4.75, GM