Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1978

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.
Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Opgave nr. 1

1° Lad κ være krumningen og κ_g den geodætiske krumning i et punkt P_0 af en to gange differentiabel kurve på et to gange differentiabelt fladestykke, og lad κ_n være krumningen i P_0 af normalsnittet i fladen svarende til kurvens tangent i P_0.

Vis, at

$$\kappa_n^2 + \kappa_g^2 = \kappa^2.$$

2° Find κ, κ_g og κ_n for et punkt P_0 af en parallelcirkel på en omdrejningskegleflade, når keglens halve åbningsvinkel er 30°, og afstanden fra P_0 til toppunktet er 6.

3° En cirkelskive med radius 2 bøjes på ovennævnte kegleflade (om man vil: klæbes på som etiket), således at randkurven rører parallelcirkelen i det betragtede punkt P_0 og i øvrigt ligger på den side af parallelcirkelens plan, der vender bort fra keglens toppunkt.

Bestem den omtalte randkurves krumning, oskulationsplan og hovednormal i punktet P_0.

Opgavesættet fortsættes

Københavns Universitet
Matematik 223
Sommeren 1978

Opgave nr. 2

1° Beskriv den sfæriske normalafbildning af et to gange differentiabelt fladestykke og angiv Gauss' definition af fladestykkets krumningsmål K i et punkt P_0.

2° Idet fladestykket tænkes givet ved en parameterfremstilling

$$\overrightarrow{OP}_{u,v} = \underline{r}(u,v) \,, \quad (u,v) \in \Omega \,,$$

hvor P_0 svarer til (u_0,v_0), skal man udlede en andengradsligning med koefficienter udtrykt ved E, F, G, L, M og N, taget i (u_0,v_0), til bestemmelse af hovedkrumningerne κ_1 og κ_2 i P_0.

Som udgangspunkt kan man tage formlen for krumning af normalsnit udtrykt ved første og anden fundamentalform.

3° Bevis, at

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \,,$$

idet K tænkes indført ved Gauss' definition.

– – – – – – – – – –

Ved bedømmelsen tillægges de to opgaver samme vægt.

To formelblade er vedhæftet

Kurver og flader i rummet.
Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f.eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f.eks. $\rho = |\rho_T| \cos\varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\,\underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:
$$\underline{v} = r\omega\underline{N}, \qquad \underline{w} = -r\omega^2\underline{R} + r\omega'\underline{N}.$$

Strækningshastighed for liniestykke, $\ell = \ell(t) \neq 0$: $\quad \dfrac{d\ell}{dt} = \underline{e}\cdot\underline{v}_2 - \underline{e}\cdot\underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\quad \dfrac{d\underline{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\underline{R} + r\dfrac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Vinkelhastighed: $\quad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{|\underline{r}\times\underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}$.

Arealhastighed: $\quad \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{2}|\underline{r}\times\underline{r}'|$.

Opløsning af acceleration: $\quad \underline{w} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v\dfrac{d\theta}{dt}\underline{n} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v^2\varkappa\underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\quad \varkappa = \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\quad \varkappa_0 = \dfrac{\varkappa\cos\varphi}{\cos^3\theta}$.

Torsion: $\quad \tau = \dfrac{[\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $\quad S = \displaystyle\int_\omega |\underline{r}'_u\times\underline{r}'_v|\,d(u,v) = \int_\omega \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

Krumning af normalsnit:

$$\varkappa_T = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,.$$

$$L = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}\cdot \underline{r}''_{u^2} = \frac{[\underline{r}'_u\,\underline{r}'_v\,\underline{r}''_{u^2}]}{\sqrt{EG-F^2}}\,, \quad M = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{uv}\,, \quad N = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{v^2}\,.$$

Middelkrumning: $$H = \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2} = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}\,.$$

Krumningsmål: $$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}\,.$$

Differentialligning for krumningskurver:

$$(EM-FL)\,du^2 + (EN-GL)\,du\,dv + (FN-GM)\,dv^2 = 0\,.$$

Nye betegnelser: $$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Christoffel symboler: $$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^{1}\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{2}\underline{r}'_2 + L_{ij}\underline{n}\,,$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Sigma_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma_{ijl}\,, \qquad \Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij}\cdot\underline{r}'_l = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\Big).$$

Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{1}(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{2}(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0\,.$$

Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{1}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0$$
$$\frac{d\xi^2}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{2}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0\,.$$

Geodætisk krumning:

$$\varkappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\big(\Sigma_{i,j} g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\big)^{3/2}}\cdot\begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{dt} & \frac{d\varphi^2}{dt} \\ \frac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^{1}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} & \frac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^{2}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} \end{vmatrix}.$$

27.4.75, GM