

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1977

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgave til besvarelse i 2 timer.
Hjælpe midler kan ikke medbringes.

Lad $(\underline{0}, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ være et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem i rummet og sæt

$$\underline{R}(v) = \underline{i} \cos v + \underline{j} \sin v, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Det kan måske lette besvarelsen tillige at sætte

$$\underline{N}(v) = -\underline{i} \sin v + \underline{j} \cos v, \quad v \in \mathbb{R}.$$

1^o Gør rede for, at

$$\vec{OP}_{u,v} = \underline{r}(u,v) = u\underline{R}(v) + v\underline{k}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

er parameterfremstilling for en vilkårlig ofte differentiabel flade. Beskriv parameterkurverne gennem et vilkårligt punkt $P_{a,b}$ på fladen. Tegn på en skitse stykker af parameterkurverne gennem $P_{1, \frac{\pi}{4}}$ tilligemed $\underline{r}'_u(1, \frac{\pi}{4})$ og $\underline{r}'_v(1, \frac{\pi}{4})$.

2^o Gør rede for, at parameterkurven gennem $P_{a,b}$ svarende til fast u har en oskulationsplan i $P_{a,b}$, og vis, at den falder sammen med fladens tangentplan i $P_{a,b}$.

(Opgaven fortsættes)

- 3^o Beskriv det sfæriske normalbillede (dvs. billedet ved den sfæriske normalafbildning) af fladestykket svarende til området $]0,1[\times]0,2\pi[$ i UV-planen. Der ønskes en præcis angivelse af art, udstrækning og beliggenhed på kuglefladen.
- (Vink: Opskriv først en parameterfremstilling for normalbilledet.)
- 4^o Vis, at målestoksforholdet i $P_{a,b}$ ved den sfæriske normalafbildning af fladen er det samme i alle tangentretninger.
- (Vink: Man kan f.eks. begynde med retningerne givet ved $\underline{r}'_u(a,b)$ og $\underline{r}'_v(a,b)$.)
- 5^o Find fladens krumningsmål i $P_{a,b}$.
- 6^o Vis, at fladens normalsnit i $P_{a,b}$ i parameterkurvernes tangentretninger begge har krumningen 0 i $P_{a,b}$. Angiv tangentretningerne for fladens hovednormalsnit i $P_{a,b}$ og find hovedkrumningerne i $P_{a,b}$.

Mat 223, 1975

formler 1

Kurver og flader i rummet.

Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f.eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f.eks. $\rho = |\rho_T| \cos \varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{a} \times \underline{c}) = [\underline{a} \underline{b} \underline{c}] \underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:

$$\underline{v} = r\omega \underline{N}, \quad \underline{w} = -r\omega^2 \underline{R} + r\omega' \underline{N}.$$

Strøkningshastighed for liniestykke, $\ell = \ell(t) \neq 0$: $\frac{d\ell}{dt} = \underline{e} \cdot \underline{v}_2 - \underline{e} \cdot \underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \underline{R} + r \frac{d\theta}{dt} \underline{N}$.

$$\text{Vinkelhastighed: } \frac{d\theta}{dt} = \frac{|\underline{r} \times \underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}.$$

$$\text{Arealhastighed: } \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} |\underline{r} \times \underline{r}'|.$$

Opløsning af acceleration: $\underline{w} = \frac{dv}{dt} \underline{t} + v \frac{d\theta}{dt} \underline{n} = \frac{dv}{dt} \underline{t} + v^2 \kappa \underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{|\underline{r}' \times \underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\kappa_0 = \frac{\kappa \cos \varphi}{\cos^3 \theta}$.

Torsion: $\tau = \frac{[\underline{r}' \underline{r}'' \underline{r}''']}{|\underline{r}' \times \underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $S = \int_{\omega} |\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v| d(u,v) = \int_{\omega} \sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

Krumning af normalsnit:

$$\kappa_T = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

$$L = \underline{n} \cdot \underline{r}_{u^2}'' = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|} \cdot \underline{r}_{u^2}'' = \frac{[\underline{r}'_u \underline{r}'_v \underline{r}_{u^2}'']}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad M = \underline{n} \cdot \underline{r}_{uv}'' , \quad N = \underline{n} \cdot \underline{r}_{v^2}'' .$$

Middelkrumning:
$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

Krumningsmål:
$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

Differentialligning for krumningskurver:

$$(EM - FL) du^2 + (EN - GL) du dv + (FN - GM) dv^2 = 0.$$

Nye betegnelser:
$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Christoffel symboler:
$$\underline{r}_{ij}'' = \Gamma_{ij}^1 \underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^2 \underline{r}'_2 + L_{ij} \underline{n},$$

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^2 g^{kl} \Gamma_{ijl}^1, \quad \Gamma_{ijl}^1 = \underline{r}_{ij}'' \cdot \underline{r}'_l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:

$$\frac{d^2 u^1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(u^1, u^2) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 u^2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(u^1, u^2) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0$$

Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \frac{d\varphi^j(t)}{dt} \xi^i = 0$$

$$\frac{d\xi^2}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \frac{d\varphi^j(t)}{dt} \xi^i = 0$$

Geodætisk krumning:

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{g}}{(\sum_{i,j} g_{ij} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt})^{3/2}} \cdot \left| \begin{array}{cc} \frac{d\varphi^1}{dt} & \frac{d\varphi^2}{dt} \\ \frac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} & \frac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^2 \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} \end{array} \right|.$$