Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1976

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgave til besvarelse i 2 timer.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

En besvarelse regnes for fuldstændig, hvis 7 af de 9 spørgsmål er besvaret korrekt.

Lad

$$\overrightarrow{OA_u} = \underline{a}(u), \quad u \in I,$$

være naturlig parameterfremstilling for en 4 gange differentiabel kurve og antag

$$\forall u \in I:\ 0 < \kappa(u) < {}^{1}/_{\rho}\ ,$$

hvor $\kappa = \kappa(u)$ er krumningen, og ρ er et fast positivt tal. Tangent-, hovednormal- og binormalvektor betegnes henholdsvis $\underline{t} = \underline{t}(u)$, $\underline{n} = \underline{n}(u)$ og $\underline{b} = \underline{b}(u)$.

1° Opskriv Frenets formler, uden begrundelse.

2° Gør rede for, at

$$\overrightarrow{OP_{u,v}} = \underline{r}(u,v) = \underline{a}(u) + \underline{n}(u)\rho\cos v + \underline{b}(u)\rho\sin v$$

er parameterfremstilling for et 2 gange differentiabelt fladestykke, idet $\Omega = I \times\,]-\pi,\pi[$ benyttes som parameterområde.

3° Beskriv fladen geometrisk.

(Vink: Begynd med parameterkurven svarende til et fastholdt u.)

(Opgaven fortsættes)

4^o For hvert $(u,v) \in \Omega$ skal man vise, at A_u ligger på fladenormalen i $P_{u,v}$.

(Bemærk til senere brug, at enhedsvektor på fladenormalen er $\underline{p}(u,v) = -\underline{n}(u)\cos v - \underline{b}(u)\sin v$.)

5^o Find arealforholdet i $(u,v) \in \Omega$ for afbildningen af parameterområdet på fladen.

6^o Vis, at fladens krumningsmål i $P_{u,v}$ er

$$\frac{-\kappa(u)\cos v}{\rho(1-\rho\kappa(u)\cos v)} .$$

7^o I hvilke punkter $P_{u,v}$ er fladen henholdsvis parabolsk, hyperbolsk og elliptisk krummet ?

8^o Vis, at hver parameterkurve svarende til fastholdt u er en krumningskurve på fladen.

(Vink: Se formelsamling.)

9^o Angiv tangentretningerne for hovednormalsnittene og bestem hovedkrumningerne i hvert punkt $P_{u,v}$ på fladen.

To formelblade er vedhæftet.

Kurver og flader i rummet.
Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f. eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f. eks. $\rho = |\rho_T| \cos\varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\,\underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:
$$\underline{v} = r\omega\underline{N}, \qquad \underline{w} = -r\omega^2\underline{R} + r\omega'\underline{N}.$$

Strækningshastighed for liniestykke, $l = l(t) \neq 0$: $\frac{dl}{dt} = \underline{e}\cdot\underline{v}_2 - \underline{e}\cdot\underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\underline{R} + r\frac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Vinkelhastighed: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{|\underline{r}\times\underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}$.

Arealhastighed: $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}|\underline{r}\times\underline{r}'|$.

Opløsning af acceleration: $\underline{w} = \frac{dv}{dt}\underline{t} + v\frac{d\theta}{dt}\underline{n} = \frac{dv}{dt}\underline{t} + v^2\varkappa\underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\varkappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\varkappa_0 = \frac{\varkappa\cos\varphi}{\cos^3\theta}$.

Torsion: $\tau = \frac{[\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $S = \int_\omega |\underline{r}'_u\times\underline{r}'_v|\,d(u,v) = \int_\omega \begin{vmatrix} E & F \\ F & G\end{vmatrix}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

Mat 223, 1975 formler 2

Krumning af normalsnit:

$$\varkappa_T = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,.$$

$$L = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{[\underline{r}'_u\,\underline{r}'_v\,\underline{r}''_{u^2}]}{\sqrt{EG-F^2}}\,, \quad M = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{uv}\,, \quad N = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{v^2}\,.$$

Middelkrumning: $$H = \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2} = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}\,.$$

Krumningsmål: $$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}\,.$$

Differentialligning for krumningskurver:

$$(EM-FL)\,du^2 + (EN-GL)\,du\,dv + (FN-GM)\,dv^2 = 0.$$

Nye betegnelser: $$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Christoffel symboler: $$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^{1}\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{2}\underline{r}'_2 + L_{ij}\underline{n}\,,$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \textstyle\sum_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma_{ijl}\,, \qquad \Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij}\cdot\underline{r}'_l = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right).$$

Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{1}(u^1,u^2)\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{2}(u^1,u^2)\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} = 0\,.$$

Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{1}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\dfrac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0$$
$$\frac{d\xi^2}{dt} + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{2}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\dfrac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0\,.$$

Geodætisk krumning:

$$\varkappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(\sum_{i,j} g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right)^{3/2}}\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi^1}{dt} & \dfrac{d\varphi^2}{dt} \\ \dfrac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{1}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} & \dfrac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{2}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} \end{vmatrix}\,.$$

27.4.75, GM