KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1975

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Opgave nr. 1

Betragt en tre gange differentiabel kurve, hvis krumning er forskellig fra 0 i hvert punkt.

1° Antag her, at kurvens tangenter alle er vinkelrette på en fast retning givet ved en vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$. Bevis da, at kurven ligger i en plan vinkelret på $\underline{a}$.

2° Antag her, at kurven har torsionen 0 i hvert punkt. Bevis da, at kurven ligger i en plan.

3° Antag her, at kurvens oskulationsplaner alle går gennem et fast punkt O, som ikke ligger på nogen tangent. Bevis da, at kurven ligger i en plan.

(Vink: Man kan benytte 2°.)

Opgave nr. 2

Udled Eulers formel for normalsnitkrumningens variation med tangentretningen i et punkt på en flade.

(Opgaven fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1975
Matematik 223.

(Forudsætninger og resultat bør formuleres præcist. Der bør gives en karakterisering af hovedkrumninger og af hovednormalsnit.)

Ved bedømmelsen tillægges de to opgaver samme vægt.

2 formelblade er vedhæftet.

Kurver og flader i rummet.
Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f. eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f. eks. $\varrho = |\varrho_T| \cos\varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\,\underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:

$$\underline{v} = r\omega\underline{N}, \qquad \underline{w} = -r\omega^2\underline{R} + r\omega'\underline{N}.$$

Strækningshastighed for liniestykke, $l = l(t) \neq 0$: $\frac{dl}{dt} = \underline{e}\cdot\underline{v}_2 - \underline{e}\cdot\underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\underline{R} + r\frac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Vinkelhastighed: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{|\underline{r}\times\underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}$.

Arealhastighed: $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}|\underline{r}\times\underline{r}'|$.

Opløsning af acceleration: $\underline{w} = \frac{dv}{dt}\underline{t} + v\frac{d\theta}{dt}\underline{n} = \frac{dv}{dt}\underline{t} + v^2\varkappa\underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\varkappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\varkappa_0 = \frac{\varkappa\cos\varphi}{\cos^3\theta}$.

Torsion: $\tau = \frac{[\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $S = \int_\omega |\underline{r}'_u\times\underline{r}'_v|\,d(u,v) = \int_\omega \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

Krumning af normalsnit:

$$\varkappa_T = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} .$$

$$L = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{[\underline{r}'_u\,\underline{r}'_v\,\underline{r}''_{u^2}]}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad M = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{uv}, \quad N = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{v^2}.$$

Middelkrumning: $$H = \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2} = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)} .$$

Krumningsmål: $$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} .$$

Differentialligning for krumningskurver:

$$(EM-FL)\,du^2 + (EN-GL)\,du\,dv + (FN-GM)\,dv^2 = 0.$$

Nye betegnelser: $$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Christoffel symboler: $$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^{1}\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{2}\underline{r}'_2 + L_{ij}\underline{n},$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Sigma_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma_{ijl}, \qquad \Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij}\cdot\underline{r}'_l = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right).$$

Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{1}(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{2}(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0 .$$

Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{1}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0$$
$$\frac{d\xi^2}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{2}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0 .$$

Geodætisk krumning:

$$\varkappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(\Sigma_{i,j} g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right)^{3/2}} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi^1}{dt} & \dfrac{d\varphi^2}{dt} \\ \dfrac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^{1}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} & \dfrac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^{2}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} \end{vmatrix} .$$

27.4.75, GM