Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1974

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Opgave nr. 1

Betragt en tre gange differentiabel rumkurve, hvis krumning $\kappa$ er forskellig fra $0$ i hvert punkt. Torsionen betegnes $\tau$. Der vælges en gennemløbsretning, og enhedsvektorerne på tangent, hovednormal og binormal betegnes $\underline{t}$, $\underline{n}$ og $\underline{b}$.

$1^\circ$ Det antages her, at kurvens tangenter alle danner samme vinkel $\varphi$, $0 < \varphi < \pi$, med en fast retning givet ved enhedsvektoren $\underline{e}$.

Vis, at kurvens hovednormaler alle står vinkelret på $\underline{e}$, og gør rede for, at

$$\underline{e} = \underline{t}\cos\varphi \pm \underline{b}\sin\varphi ,$$

hvor der enten læses $+$ for alle kurvepunkter eller $-$ for alle kurvepunkter.

Vis videre, at

$$\frac{\tau}{\kappa} = \pm\cot\varphi .$$

$2^\circ$ Her antages omvendt, at $\frac{\tau}{\kappa}$ er konstant langs kurven. Vis, at kurvens tangenter alle danner samme vinkel med en fast retning.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet
Matematik 223
Sommeren 1974



Opgave nr. 2

Med $\kappa_T$ betegnes krumningen af normalsnittet med en given tangentretning T i et punkt P på en to gange differentiabel flade. Det forudsættes, at $\kappa_T$ er forskellig fra 0. Betragt en to gange differentiabel kurve på fladen, der går gennem P, ligeledes med tangentretning T. Kurvens krumning i P betegnes $\kappa$.

1° Gør rede for, at sidstnævnte kurve har en oskulationsplan i P, og at denne er forskellig fra fladens tangentplan i P.

2° Bevis, at

$$\kappa = \frac{|\kappa_T|}{\cos\varphi} ,$$

hvor $\varphi$ er vinklen mellem kurvens oskulationsplan og normalsnittets plan. (Meusnier 1776.)

(Vink, til begge spørgsmål: Idet man benytter parameterfremstillinger for flade og kurver, kan man med fordel for hver kurve betragte projektionen af $\underline{r}''_{t^2}$ på fladenormalen.)

-----------

Ved bedømmelsen tillægges de to opgaver samme vægt.

2 formelblade er vedhæftet.

# Kurver og flader i rummet.
## Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f.eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f.eks. $\rho = |\rho_T| \cos\varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\,\underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:
$$\underline{v} = r\omega\underline{N}, \qquad \underline{w} = -r\omega^2\underline{R} + r\omega'\underline{N}.$$

Strækningshastighed for liniestykke, $l = l(t) \neq 0$: $\quad \dfrac{dl}{dt} = \underline{e}\cdot\underline{v}_2 - \underline{e}\cdot\underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\quad \dfrac{d\underline{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\underline{R} + r\dfrac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Vinkelhastighed: $\quad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{|\underline{r}\times\underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}$.

Arealhastighed: $\quad \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{2}|\underline{r}\times\underline{r}'|$.

Opløsning af acceleration: $\quad \underline{w} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v\dfrac{d\theta}{dt}\underline{n} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v^2\varkappa\underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\quad \varkappa = \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\quad \varkappa_0 = \dfrac{\varkappa\cos\varphi}{\cos^3\theta}$.

Torsion: $\quad \tau = \dfrac{[\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $\quad S = \displaystyle\int_\omega |\underline{r}'_u\times\underline{r}'_v|\,d(u,v) = \int_\omega \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

*Krumning af normalsnit:*

$$\varkappa_T = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} .$$

$$L = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{[\underline{r}'_u\,\underline{r}'_v\,\underline{r}''_{u^2}]}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad M = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{uv}, \quad N = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{v^2}.$$

*Middelkrumning:* $$H = \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG-F^2)} .$$

*Krumningsmål:* $$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} .$$

*Differentialligning for krumningskurver:*

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0.$$

*Nye betegnelser:* $$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

*Christoffel symboler:* $$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^{1}\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{2}\underline{r}'_2 + L_{ij}\underline{n},$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \sum_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma_{ijl}, \qquad \Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij}\cdot\underline{r}'_l = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right).$$

*Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:*

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{1}(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{2}(u^1,u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0 .$$

*Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:*

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{1}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0$$
$$\frac{d\xi^2}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{2}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0 .$$

*Geodætisk krumning:*

$$\varkappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(\sum_{i,j} g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right)^{3/2}} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi^1}{dt} & \dfrac{d\varphi^2}{dt} \\ \dfrac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{1}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} & \dfrac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{2}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} \end{vmatrix} .$$

27.4.75, GM