Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1985

MATEMATIK 212

3 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler.

Ved vurdering af besvarelsen lægges der lige stor vægt på hver af nedenstående 4 opgaver.

Opgave nr. 1

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad der være givet en følge $(E_n)_{n\geq 1}$ af mængder fra σ-algebraen $\mathbb{E}$.

1°. Vis, at

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu(E_k) \quad .$$

2°. Vis, at hvis $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k) < \infty$, så gælder

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0 \quad .$$

Opgave nr. 2

Betragt de to delmængder af $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \leq 1\} \quad .$$

1°. Vis, at $A \cap B$ er en Borelmængde i $\mathbb{R}^3$.

2°. Angiv billedet af $A \cap B$ ved projektionen $(x,y,z) \mapsto x$ af $\mathbb{R}^3$ på $\mathbb{R}$.

3°. Find $m_3(A \cap B)$, det tredimensionale Lebesgue mål af $A \cap B$.

Opgavesættet fortsættes

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1985
Matematik 212

Opgave nr. 3

1°. Definer begrebet en Dirac følge $(k_n)_{n\geq 1}$ for $\mathbb{R}^d$.

2°. Vis, at hvis $k \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ opfylder $k \geq 0$ og $\int k(x)dx = 1$, så er $k_n(x) = n^d k(nx)$, $n \geq 1$ en Dirac følge.

3°. Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ er kontinuert i $x_0 \in \mathbb{R}^d$, så vil $k_n * f(x_0) \to f(x_0)$ for $n \to \infty$, idet $(k_n)_{n\geq 1}$ er en vilkårlig Dirac følge.

Opgave nr. 4

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π, der er fastlagt ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad 0 < x < 2\pi , \\ \pi & \text{for} \quad x = 0 . \end{cases}$$

1°. Find Fourier rækken for f og gør rede for, at rækken konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$ med sum $f(x)$.

2°. Vis formlerne

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} , \qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$