Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Maj 1984

MATEMATIK 212

3 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler.
Ved vurdering af besvarelsen lægges der lige stor vægt på hver af nedenstående 4 opgaver.

Opgave nr. 1

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i X og lad som sædvanlig $M^+(X,\mathbb{E})$ betegne mængden af målelige funktioner $f\colon X \to [0,\infty]$. Lad der desuden være givet en afbildning $I\colon M^+(X,\mathbb{E}) \to [0,\infty]$ med egenskaberne:

(i) $I(f+g) = I(f) + I(g)$ for $f,g \in M^+(X,\mathbb{E})$.

(ii) $I(cf) = cI(f)$ for $f \in M^+(X,\mathbb{E})$ og $c \in [0,\infty]$.

(iii) $I(f_n) \uparrow I(f)$ når (f_n) er en følge fra $M^+(X,\mathbb{E})$ så $f_n \uparrow f \in M^+(X,\mathbb{E})$.

Vis, at der findes et mål $\mu\colon \mathbb{E} \to [0,\infty]$ så

$$I(f) = \int f\,d\mu \quad \text{for} \quad f \in M^+(X,\mathbb{E}),$$

og at μ er entydigt bestemt.

Opgave nr. 2

1° Vis, at funktionen $f\colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}, \quad 0 < x < \pi,$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

tilhører $\mathcal{L}_1(]0,\pi[)\setminus\mathcal{L}_2(]0,\pi[)$, idet disse rum er dannet med hensyn til Lebesgue målets restriktion til $]0,\pi[$.
(Vink. Sammenlign eventuelt f med en simplere funktion.)

2° Idet $A =]0,\frac{\pi}{2}[\times]0,\frac{\pi}{2}[$ skal man vise, at

$$\int_A \frac{dm_2(x,y)}{\sqrt{\sin(x+y)}} < \infty .$$

Opgave nr. 3

1° Vis, at hvis $f,g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ opfylder $f(x) = g(x) = 0$ for $x < 0$, så er $f*g(x) = 0$ for $x \leq 0$, og for næsten alle $x > 0$ gælder

$$f*g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy .$$

2° For $n=1,2,\ldots$ defineres funktionen k_n ved

$$k_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx} & \text{for} \quad x \geq 0 , \\ 0 & \text{for} \quad x < 0 . \end{cases}$$

Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ opfylder $f(x) = 0$ for $x < 0$, så er $f*k_n$ kontinuert og begrænset og

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |f(x) - f*k_n(x)|\,dx = 0 .$$

Opgave nr. 4

1° Vis at en reel funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, som er lige (dvs. $f(x) = f(-x)$ for $x \in \mathbb{R}$) og periodisk med periode π, har en Fourier række af formen

(opgaven fortsættes)