Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Januar 1984

MATEMATIK 212

3 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler.

Ved vurdering af besvarelsen lægges der lige stor vægt på hver af nedenstående 4 opgaver.

Opgave nr. 1

1° Formuler og bevis Hölders ulighed.

2° Bevis, at hvis $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$ og $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^d)$, hvor p og q er som i Hölders ulighed, så er $f*g$ overalt defineret og kontinuert og opfylder

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q \ .$$

Opgave nr. 2

1° Skitser for $a > 0$ mængden

$$D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq a\}$$

og gør rede for, at den er en Borelmængde.

Vis, at dens areal er

$$m_2(D_a) = \frac{2}{3} a^4 \ .$$

2° Find for $a > 0$ volumenet af mængden

$$T_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|} \leq a\} \ .$$

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1984

Matematik 212

Opgave nr. 3

For $a \in \mathbb{R}$ og $r > 0$ betegner $B(a,r)$ cirkelskiven i $\mathbb{R}^2$ med centrum $(a,0)$ og radius r, dvs.

$$B(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 < r^2\} .$$

1° Vis - gerne geometrisk - at

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(a+n,n) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a\} \quad \text{for} \quad a \in \mathbb{R} .$$

Lad μ og ν betegne to endelige mål på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ og antag at

$$\mu(B(a,r)) = \nu(B(a,r)) \quad \text{for alle} \quad a \in \mathbb{R}, \quad r > 0 .$$

2° Vis, at

$$\mu(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a\}) = \nu(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a\}) \quad \text{for alle} \quad a \in \mathbb{R} .$$

3° Vis endelig at $\mu_1 = \nu_1$, hvor $\mu_1 = p_1(\mu)$ og $\nu_1 = p_1(\nu)$ er billedmålene på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ af μ og ν under projektionen $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $p_1(x,y) = x$ for $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Opgave nr. 4

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} e^{inx} , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

1° Vis, at f er en periodisk funktion af klasse C^2 og find Fourier rækken for f''.

2° Vis, at hvis $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$ opfylder

$$(f-f'')*g = f , \qquad \text{(L)}$$

så er g's Fourier koefficienter givet ved formlen

$$c_n(g) = \frac{1}{1+n^2} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z} .$$

3° Vis, at der findes en kontinuert funktion $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, der opfylder ligningen (L).