Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Januar 1983

Matematik 212. Mål- og integralteori.

3 timers skriftlig prøve uden hjælpemidler.
Ved vurdering af besvarelsen lægges der lige stor vægt på hver af nedenstående 4 opgaver.

Opgave nr. 1.

1° Definer begreberne σ-algebra og frembringersystem for en σ-algebra.

2° Lad $(E, \mathbb{E})$ og $(F, \mathbb{F})$ være to ikke tomme mængder forsynet med σ-algebraer, og lad $\mathbb{A}$ være et frembringersystem for $\mathbb{F}$. Vis at en afbildning $\varphi: E \to F$ er $\mathbb{E}-\mathbb{F}$-målelig hvis $\varphi^{-1}(A) \in \mathbb{E}$ for alle $A \in \mathbb{A}$.

3° Vis at mængdesystemerne $\mathbb{A}_1 = \{]a,b] \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ og $\mathbb{A}_2 = \{]-\infty,r[\mid r \in \mathbb{Q}\}$ frembringer samme σ-algebra.

Opgave nr. 2.

For vektorer $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ i $\mathbb{R}^2$ betegner $\langle x,y\rangle$ det sædvanlige skalære produkt $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$.

Lad μ være et mål på Borelalgebraen i $\mathbb{R}^2$ og definer

$$D(\mu) = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid (x \to e^{\langle x,y\rangle}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2, \mu)\right\},$$

$$f_\mu(y) = \int e^{\langle x,y\rangle}\, d\mu(x) \quad \text{for } y \in D(\mu).$$

(opgavesættet fortsætter)

1° Vis at $D(\mu)$ er en konveks mængde og at

$$f_\mu(\lambda y+(1-\lambda)z) \leq f_\mu(y)^\lambda f_\mu(z)^{1-\lambda} \quad \text{for} \quad y,z \in D(\mu) \;,\; 0<\lambda<1 \;.$$

(At $D(\mu)$ er konveks betyder, at hvis $y,z \in D(\mu)$ og $0 < \lambda < 1$, så vil $\lambda y + (1-\lambda)z \in D(\mu)$.)

2° Lad μ være restriktionen af Lebesgue målet m i $\mathbb{R}^2$ til første kvadrant, i.e.

$$\mu(B) = m(B \cap \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0\}) \quad \text{for} \quad B \in \mathbb{B}_2 \;.$$

Bestem $D(\mu)$ og funktionen f_μ i dette tilfælde.

3° Lad μ være restriktionen af Lebesgue målet til enhedscirkelskiven $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Vis at $D(\mu) = \mathbb{R}^2$ og at

$$f_\mu(y) \leq \pi e^{\|y\|} \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{R}^2 \;,$$

hvor $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.

Opgave nr. 3.

1° Lad $A \subseteq [0,2\pi[$ være en Borelmængde. Gør rede for at

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sin nx \, dx = 0 \;.$$

2° Lad $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ være en følge af positive hele tal og definer

$$E = \{x \in [0,2\pi[\mid \lim_{k\to\infty} \sin n_k x \quad \text{eksisterer}\}$$

(opgavesættet fortsætter)

og

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \sin n_k x \quad \text{for} \quad x \in E\ .$$

Vis at E er en Borel mængde og at $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ er en Borel funktion.

3° Vis at

$$\int_A \varphi(x)\,dx = 0$$

for enhver Borel mængde $A \subseteq E$ og slut at $\varphi(x) = 0$ for næsten alle $x \in E$ (m.h.t. Lebesguemålet).

Opgave nr. 4.

For $x,y \in [0,\pi]$ defineres

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(\pi-y) & \text{for} \quad 0 \le x \le y\ , \\ \frac{1}{2}y(\pi-x) & \text{for} \quad y \le x \le \pi\ . \end{cases}$$

1° Vis at

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} \quad \text{for} \quad x,y \in [0,\pi]$$

og at

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)f(x,z)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \sin nz}{n^4} \quad \text{for} \quad y,z \in [0,\pi].$$

(Vink. For fast $y \in [0,\pi]$ kan man betragte en ulige periodisk funktion g så $g(x) = f(x,y)$ for $x \in [0,\pi]$.)

2° Find summen af rækken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.