Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Januar 1982

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.
Prøven afholdes den 15. januar kl. 9-12.
Ved vurdering af besvarelsen lægges der lige stor vægt på hver af nedenstående 5 opgaver.

Opgave nr. 1.

Lad X og Y betegne to ikke tomme mængder forsynet med σ-algebraer $\mathbb{X}$ og $\mathbb{Y}$, og lad $\mathbb{A}$ og $\mathbb{B}$ være mængdesystemer på X og Y så $X \in \mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ og $Y \in \mathbb{B} \subseteq \mathbb{Y}$.
Vis, at hvis $\mathbb{X}$ er den mindste σ-algebra på X, der indeholder $\mathbb{A}$, og $\mathbb{Y}$ er den mindste σ-algebra på Y, der indeholder $\mathbb{B}$, så er produkt-σ-algebraen $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ den mindste σ-algebra på $X\times Y$, der indeholder mængdesystemet $\{A\times B \mid A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$.

Opgave nr. 2.

Lad $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ være en familie af komplekse tal så

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Vis, at der findes $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ med Fourier rækken

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

og at

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 .$$

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1982
Matematik 212

Opgave nr. 3.

Lad $f: \mathbb{R}^2 \to [0,\infty[$ være en Borelfunktion.

1° Vis at

$$M_f = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2} \leq f(x_1,x_2)\}$$

er en Borelmængde i $\mathbb{R}^4$ med Lebesguemål

$$m_4(M_f) = \pi\int_{\mathbb{R}^2} f dm_2 \ ,$$

hvor m_k er Lebesguemålet i $\mathbb{R}^k$.

2° Find $m_4(M_f)$ når $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Opgave nr. 4.

Schwartz rummet $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ defineres som bekendt som mængden af funktioner $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, hvor

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall m \in \mathbb{N} : x^m D^n \varphi(x) \to 0 \quad \text{for} \quad |x| \to \infty.$$

1° Vis, at for $f,g \in \mathcal{S}$ er $fg \in \mathcal{S}$ og $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$.
(Leibniz formel for differentiation

$$D^n(fg) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} D^p f D^{n-p} g$$

kan benyttes uden bevis).

2° Vis, at for $f,g \in \mathcal{S}$ er $f*g \in \mathcal{S}$.

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1982
Matematik 212

Opgave nr. 5.

I det følgende betragtes mål μ, ν på Borelalgebraen $\mathbb{B}$ på $\mathbb{R}$, som forudsættes endelige, i.e. $\mu(\mathbb{R}) < \infty$, $\nu(\mathbb{R}) < \infty$. Man siger, at μ har n'te moment $(n = 1,2,\dots)$, hvis $x^n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{B},\mu)$, og tallet

$$M_n(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x)$$

kaldes μ's n'te moment.

1° Vis, at hvis μ har n'te moment, så har μ også k'te moment for $k = 1,2,\dots,n$.

2° Lad $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $p(x,y) = xy$. Vis, at hvis μ og ν har n'te moment, så har billedmålet $\sigma = p(\mu\times\nu)$ også n'te moment og

$$M_n(\sigma) = M_n(\mu)M_n(\nu).$$

(Billedmålet $\sigma = p(\mu\times\nu)$ er defineret ved

$$\sigma(B) = \mu\times\nu(p^{-1}(B)),\ B \in \mathbb{B}).$$