Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen
Vinteren 1980/81

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Tre timers skriftlig prøve.
Hjælpemidler kan ikke medbringes.
Ved vurdering af besvarelsen lægges der lige stor vægt på hver af nedenstående 5 opgaver.

Opgave nr. 1.

Lad $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = |x|e^{x^2-2y} \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Vis at mængden

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq x^2 , 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

er en Borelmængde og find dens tredimensionale Lebesgue mål.

Opgave nr. 2.

1° Vis at et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm er fuldstændigt, såfremt enhver absolut konvergent række med led fra $\mathcal{V}$ er konvergent i $\mathcal{V}$.

2° Vis at rummet $\mathcal{L}_1(X,\mathbb{E},\mu)$ er fuldstændigt. (Ved beviset for 2° kan de sædvanlige sætninger om grænseovergang med målelige funktioner benyttes uden bevis.)

Opgave nr. 3.

For $t > 0$ og $x \in \mathbb{R}$ defineres

(opgaven fortsættes)

$$A_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2+x^2} \quad .$$

Vis at for $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ gælder

$$\lim_{t\to 0} \| f - f*A_t \|_1 = 0 ,$$

og

$$\lim_{t\to\infty} \| f*A_t \|_\infty = 0 .$$

Opgave nr. 4.

Lad $\mathbb{B}_+$ betegne σ-algebraen af Borel mængder i $[0,\infty[$, d.v.s.

$$\mathbb{B}_+ = \{B \in \mathbb{B} \mid B \subseteq [0,\infty[\} ,$$

og lad $\mu\colon \mathbb{B}_+ \to [0,\infty]$ være et mål med egenskaben

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\, d\mu(x) < \infty .$$

1^{o} Vis at der ved udtrykket

$$f(s) = \int_0^\infty \frac{d\mu(x)}{s+x} , \quad s > 0 ,$$

defineres en kontinuert funktion $f\colon]0,\infty[\to [0,\infty[$.

2^{o} Vis at

$$\lim_{s\to\infty} sf(s) = \mu([0,\infty[) .$$

Opgave nr. 5.

Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π ,

(Opgaven fortsættes)

der er fastlagt ved

$$f(x) = \sqrt{|x|} \quad \text{for} \quad x \in \,]-\pi,\pi].$$

1° Vis at Fourier rækken for f, som betegnes

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

er konvergent med sum $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

2° Vis at $c_n = c_{-n}$, og benyt dette til at vise formlerne

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{\pi}{36}$.