KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen
Vinteren 1979/80

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.

Opgave nr. 1

a) og b) er uden forbindelse.

a) Lad $f_0 : \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$ være givet ved

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_0(x) = (1-x^2)1_{[0,1]}(x) \ ,$$

lad f_n være givet for $n = 1,2,\ldots$ ved

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_n(x) = f_0(n^3x^2) \ ,$$

og lad $f = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n f_n$, hvor τ som sædvanlig betegner translation. Gør rede for at f er integrabel og angiv et udtryk for $\int_{\mathbb{R}} f dm$.

b) Gør rede for at

$$\int_0^1 \frac{1-\sqrt{y}}{(1+y)^2}\, dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{dx}{(1+y)^2}\right) dy$$

og benyt dette til at vise at

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{y}dy}{(1+y)^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ .$$

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 2

Lad $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ være givet ved $f = 1_{]-1,1]}$.

1°. Gør rede for at $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

2°. Vis at $\hat{f}(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$ for alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3°. Gør rede for at $\hat{f} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

4 . Vis at hvis ligningen

$$(y')*(y') - 2y*y = f$$

har en integrabel løsning y med integrabel afledet, så er $\hat{y}$ også integrabel.

Opgave nr. 3

Lad $X = [1,\infty[$ og lad m betegne Lebesguemålet på X^2. Definer k ved

$$\forall (x,y) \in X^2 : \qquad k(x,y) = \frac{\sin xy}{xy}$$

1°. Vis at $k \in \mathcal{L}_2(X^2, m)$.

2°. Lad $f \in \mathcal{L}_2(X)$ og gør rede for at

$$g : \quad x \curvearrowright \int \frac{\sin xy}{xy} f(y)dy$$

er defineret for næsten alle $x \in X$ og at g er en Borelfunktion.

3°. Vis at $g \in \mathcal{L}_2(X)$.

(Opgaven fortsættes)

(opgave 3 fortsat)

4°. Lad $f(y) = \frac{1}{y^3}$ for alle $y \in X$ og betragt

$$g(x) = \int_X \frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{1}{y^3}\, dy.$$

Vis at g' eksisterer og er givet ved

$$\forall x \in X: \quad g'(x) = \int_X \left(\frac{\cos xy}{xy^3} - \frac{\sin xy}{x^2 y^4} \right) dy .$$

Opgave nr. 4

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum for hvilket $\mu(X) = 1$. Lad (f_n) være en følge af reelle μ-målelige funktioner der konvergerer μ-næsten overalt mod f.

For $k, n = 1, 2, \ldots$ defineres

$$E_{k,n} = \{x \mid |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \quad \text{for} \quad m = n, n+1, \ldots\}.$$

1°. Gør rede for at $E_{k,n}$ er målelig for alle k, n.

2°. Vis at for $k = 1, 2, \ldots$ gælder at

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n} \supseteq \{x \mid \lim f_n(x) = f(x)\} \cap \{x \mid |f(x)| < \infty\} .$$

3°. Vis at hvis f er endelig μ-næsten overalt gælder for $k = 1, 2, \ldots$ at

$$\lim_n \mu(X \setminus E_{k,n}) = 0.$$

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 5

Lad for $n = 1,2,\ldots$ $f_n \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{T})$ opfylde at

$$\|f_n\|_\infty \leq 1$$

og antag der findes en funktion f for hvilken $f_n \to f$ næsten overalt m.h.t. Lebesguemål.

1^o. Gør rede for at $f \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{T})$.

2^o. Hvis f_n har Fourierkoefficienterne $(c_k^{(n)})_{k\in\mathbb{Z}}$ og f Fourierkoefficienterne $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, skal det bevises at

$$\forall k \in \mathbb{Z}: \quad c_k^{(n)} \to c_k \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

3^o. Lad $\{\mathcal{F}_k\}$ betegne Fejer-kærnen og vis at

$$\forall x_0 \in \mathbb{T} \quad \forall k \in \mathbb{Z}: \quad f_n * \mathcal{F}_k(x_0) \to f * \mathcal{F}_k(x_0) \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

4^o. Antag om Fourierrækken for hvert f_n at den er summabel i x_0. Antag også at der findes $\delta \in]0,\pi[$ så $f_n \to f$ uniformt i $]x_0-\delta, x_0+\delta]$. Vis at Fourierrækken for f er summabel i x_0.