KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1978-79

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.

Prøven afholdes torsdag den 11. januar kl. 14-17.

Dette sæt består af fire opgaver.

Opgave nr. 1.

Betragt funktionen f defineret på $[1,\infty[\times[0,\infty[$ ved $\forall(x,y)\in[1,\infty[\times[0,\infty[: f(x,y) = e^{-xy}\sin 2y$

1° Vis at f er integrabel m.h.t. 2-dimensionalt Lebesguemål.

2° Vis dernæst at

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}\sin 2y}{y}\,dy = \mathrm{Arctan}\ 2.$$

Opgave nr 2.

1° Definer et Hilbertrum.

2° Lad m betegne Lebesguemål og betragt rummet $\mathcal{L}_2([0,1],m)$. Gør rede for hvordan et Hilbertrum kan dannes ud fra $\mathcal{L}_2([0,1],m)$.

(Opgaven fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1978/79
Matematik 212.

For $n = 1,2,\ldots$ defineres funktionerne

$$e_n = \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^j \, 1_{]j/2^n,(j+1)/2^n]}.$$

3° Gør rede for at $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er en ortonormalfamilie i $\mathscr{L}_2([0,1],m)$.

4° Lad $f(x) \equiv 1$ og vis at $f \in \mathscr{L}_2([0,1],m)$. Find ortogonaludviklingen af f m.h.t. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

5° Er $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en ortonormalbasis?
Begrund svaret.

Opgave nr. 3.

For $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ betegnes som sædvanlig med $\hat{f}$ den Fouriertransformerede af f, defineret ved

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi itx} \, dx.$$

Lad $g_1, g_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ og forudsæt følgende:

i) g_1 er en reel funktion, der er lige (d.v.s. $\forall x \in \mathbb{R}: g_1(x) = g_1(-x)$). Endvidere er $\int_{\mathbb{R}} g_1(x)dx = 1$.

ii) $\hat{g}_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

1° Gør rede for at $\hat{g}_1$ er en reel funktion.

2° Gør rede for at funktionen h givet ved

$$\forall t \in \mathbb{R}: \qquad h(t) = \frac{\hat{g}_2(t)}{\hat{g}_1(t)+2\pi it}$$

er integrabel.

(Opgaven fortsættes)

3° Antag at $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ er en løsning til differentialligningen

$$f*g_1 + f' = g_2 .$$

Udled et udtryk for f.

Opgave nr. 4.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og antag $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge af mængder i $\mathbb{E}$ for hvilke

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \mu(E_n) < 2^{-n} .$$

Lad

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{n+k} .$$

1° Gør rede for at $\mu(E) = 0$.

Lad $f \in \mathscr{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og definer funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ved

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad f_n = |f|\, 1_{E_n} .$$

2° Vis at for alle $x \notin E$ gælder at $f_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$.

3° Vis at der for f gælder følgende:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall B \in \mathbb{E}: \ \mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B |f|d\mu < \varepsilon .$$

(Man kan f.eks. antage, at udsagnet ikke er sandt og derved bringe ovenstående i anvendelse).