KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1977-78

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Prøven afholdes tirsdag den 10. januar kl. 9-12.

Opgave nr. 1.

Nedenstående spørgsmål er ikke forbundne.

A. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$.

Vis, at

$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

har σ-endeligt mål, d.v.s. der findes $\mathbb{E}$-målelige mængder $K_1, K_2, \cdots$ således at $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ og $\mu(K_n) < \infty$ for $n = 1,2,\cdots$.

B. Gør rede for at $\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin xy \, dy \right) dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

Opgave nr. 2.

Nedenstående spørgsmål er uden forbindelse med hinanden.

A. Lad $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner og antag $f_1(x) = f_2(x)$ for m - n.a. $x \in \mathbb{R}$, hvor m betegner Lebesguemålet i $\mathbb{R}$. Vis at $f_1 = f_2$.

B. Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \emptyset$. Som bekendt er en funktion $f \colon X \to [-\infty,\infty]$ $\mathbb{E}$-målelig hvis

$$\forall a \in \mathbb{R} \colon \{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathbb{E}.$$

(Opgaven fortsættes)

Benyt definitionen af en σ-algebra til at vise at f er $\mathbb{E}$-målelig hvis og kun hvis

$$\forall a \in \mathbb{R}: \{x \in X \mid f(x) < a\} \in \mathbb{E}.$$

C. Lad V være et vektorrum med skalarprodukt $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$. Vis at hvis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge af vektorer i V og x er et element i V for hvilke

$$\|x_n\| \to \|x\| \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

og

$$\forall y \in V: \langle x_n \mid y\rangle \to \langle x \mid y\rangle \quad \text{for} \quad n \to \infty,$$

så gælder at $x_n \to x$ for $n \to \infty$.

Opgave nr. 3.

De to nedenstående spørgsmål er ikke forbundne.

A. Udregn Lebesgueintegralet $\int_0^1 |\log x|\,dx$ med begrundelse for de enkelte trin i udregningen.

B. Gør rede for at $\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+n^2\sin x}dx \to 0$ for $n \to \infty$.

Opgave nr. 4.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum for hvilket $\mu(X) = 1$ og lad $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ være ikke-negativ. Vi benytter betegnelsen f^n for $n = 2,3,\cdots$ for funktionen givet ved

$$\forall x \in X: (f^n)(x) = (f(x))^n.$$

(Opgaven fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1977/78.
Matematik 212.

1° Formuler Fatou's lemma for funktionsfølgen
$f, f^2, f^3, \ldots$.

2° Antag at $\int_X f^n d\mu = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at $f(x) = 1$ for μ-næsten alle $x \in X$. (Man kan udnytte opspaltningen

$X = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \cup \{x \in X \mid f(x) > 1\} \cup \{x \in X \mid f(x) < 1\}$).

3° Vis at for en vilkårlig ikke-negativ funktion $g \in \mathscr{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ gælder at

$$M = \lim_n \int_X g^n d\mu$$

eksisterer i $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ og at $M = \infty$ eller $M \in [0,1]$.

Opgave nr. 5.

Lad funktionen $f: \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$ være givet ved

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = e^{-\pi x^2}.$$

Om f gælder åbenbart

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f'(x) = -2\pi x f(x)$$

(denne bemærkning kan udnyttes i 3° og 4° nedenfor).

1° Gør rede for at $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R})$ for alle $p \in [1,\infty]$.

Lad $\hat{f}$ være den Fouriertransformerede af f, altså funktionen givet ved

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x t} dx.$$

(Opgaven fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1977/78.
Matematik 212.

2° Gør rede for at $\hat{f}$ er differentiabel.

3° Vis at

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \hat{f}'(t) = -2\pi t \hat{f}(t).$$

(man kan f.eks. benytte partiel integration).

4° Benyt 3° og bemærkningen i indledningen til at slutte at

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \hat{f}(t) = f(t)$$

(det kan benyttes uden bevis at $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$).