KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1976-77

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.

Prøven afholdes tirsdag den 11. januar kl. 13-16.

Opgave nr. 1.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, lad $E_1,E_2,\ldots$ tilhøre $\mathbb{E}$ og antag, at

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty .$$

1° Vis, at $\mu(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k) \to 0$ for $n \to \infty$.

2° Vis, at det for μ-næsten alle $x \in X$ gælder, at x tilhører højst endelig mange af mængderne $E_1,E_2,\ldots$.

Opgave nr. 2.

1° Angiv mængden $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ på en skitse og find $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y)$, hvor

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos y}{y} & \text{for } (x,y) \in E \\ 0 & \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E . \end{cases}$$

2° Lad $G\colon]0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ være differentiabel med afledet

$$DG(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad x \in]0,\tfrac{\pi}{2}],$$

og antag $G(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Vis, at $G \in \mathscr{L}(]0,\frac{\pi}{2}])$, og find $\int_0^{\pi/2} G(x)\,dx$.

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1976/77
Matematik 212

Opgave nr. 3.

Idet $(X,\mathbb{E},\mu)$ er et målrum med $\mu(X) < \infty$, sætter vi

$$d(A,B) = \mu((A\setminus B) \cup (B\setminus A)) \quad \text{for} \quad A,B \in \mathbb{E} .$$

1° Vis, at $d(A,B) = \| 1_A - 1_B \|_1$ for $A,B \in \mathbb{E}$.

2° Vis, at d er en pseudometrik i $\mathbb{E}$.

3° Vis, at $\mathbb{E}$ med pseudometrikken d er fuldstændigt.

Opgave nr. 4.

1° Vis, at

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{e^x - t}\, dx < \infty$$

for hvert $t \in]-\infty,1[$.

2° Vis, at der for hvert $t \in [-1,1[$ gælder

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{ix}}{e^x - t}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n-i} .$$

(Vink. Man kan have nytte af en kvotientrække med sum

$$e^{(i-1)x} \cdot \frac{1}{1-te^{-x}} \quad .)$$

Opgave nr. 5.

Idet γ er et irrationalt og a et vilkårligt reelt tal, skal man vise, at

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(a + k\cdot 2\pi\gamma) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx ,$$

1° når $f(x) = e^{imx}$, $x \in \mathbb{R}$, med $m \in \mathbb{Z}$.

2° når f er et trigonometrisk polynomium.

3° når $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er kontinuert og har periode 2π.