Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1975-76

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.

Prøven afholdes den 13. januar kl. 9-12.

Opgave nr. 1.

Gør rede for, at mængden

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\}$$

tilhører Borel algebraen i $\mathbb{R}^2$, og bestem dens Lebesgue mål $m(E)$.

(Tegnet "v" står som bekendt for "og/eller".)

Opgave nr. 2.

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f: X \to \mathbb{C}$ være en $\mathbb{E}$-målelig funktion. For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in X$ sættes

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når } |f(x)| \leq n \\ n\,\dfrac{f(x)}{|f(x)|} & \text{når } |f(x)| > n\,. \end{cases}$$

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1975-76.

Matematik 212.

(opgave 2 fortsat fra forrige side)

1° Gør rede for, at hver af funktionerne $f_n: X \to \mathbb{C}$, $n = 1,2,\ldots,$ er $\mathbb{E}$-målelig.

2° Bevis, at

$$f \in \mathscr{L}(X,\mathbb{E},\mu) \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| d\mu < \infty ,$$

samt i bekræftende fald, at

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Opgave nr. 3.

Funktionen $F: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ defineres ved

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx, \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

1° Gør rede for, at definitionen har mening.

2° Bevis, at $F(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

3° Bevis, at F er differentiabel med

$$DF(t) = -\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

(Vink. Undervejs kan man evt. benytte, at

$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.)

(opgaven fortsættes)

(opgave 3 fortsat fra side 2)

4^o Angiv $F(t)$ explicit, uden brug af integraltegn.

Opgave nr. 4.

Lad f og g være funktioner defineret på $\mathbb{R}$, begge med periode 2π og begge tilhørende $\mathscr{L}(\mathbb{T})$. Antag, at $f(x) = g(x)$ for hvert punkt x i et interval $]a,b[$, samt at Fourier rækken for f er divergent i punktet $x_o \in]a,b[$, men summabel i x_o.

Er Fourier rækken for g nødvendigvis

(a) divergent i x_o ? (b) summabel i x_o ?

Begrund svarene.

Opgave nr. 5.

Antag $k \in \mathscr{L}_p(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y}, \mu \times \upsilon)$, hvor $\mu: \mathscr{X} \to [0,\infty]$ og $\upsilon: \mathscr{Y} \to [0,\infty]$ er σ-endelige mål i mængder X og Y, medens $p \in]1,\infty[$. Vi forudsætter $\mu(X) > 0$.

1^o Vis, at snitfunktionen $y \to k(x,y)$, $y \in Y$, tilhører $\mathscr{L}_p(Y, \mathscr{Y}, \upsilon)$ for μ-næsten alle $x \in X$.

(opgaven fortsættes)

(opgave 5 fortsat fra side 3)

Idet $g \in \mathscr{L}_q(Y, \mathscr{Y}, \nu)$, hvor $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sætter vi

$$f(x) = \int_Y k(x,y)g(y)d\nu(y)$$

for hvert $x \in X$, hvor funktionen $y \rightarrow k(x,y)g(y)$, $y \in Y$, er integrabel med hensyn til ν.

2^o Begrund, at $f(x)$ er defineret for μ-næsten alle $x \in X$.

Vis, at $f \in \mathscr{L}_p(X, \mathscr{X}, \mu)$, og giv en vurdering opadtil af $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$.