Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1974-75

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.

Prøven afholdes den 14. januar kl. 14-17.

Opgave nr. 1.

Lad $\mu: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ være et mål i en mængde $X \neq \emptyset$, lad p være et reelt tal, $1 < p < \infty$, og betragt en funktion $f: X \to \mathbb{C}$.

1° Vis, at

$$f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} \iff |f|^{p-1}f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} .$$

2° Vis, at

$$f \in \mathscr{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu) \iff |f|^{p-1}f \in \mathscr{L}(X, \mathbb{E}, \mu) .$$

Opgave nr. 2.

1° Beregn Lebesgue integralet $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$. Begrund hvert skridt i udregningen.

2° Bevis, at

$$\int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3.

Lad μ være tællemålet i en mængde $X \neq \emptyset$. (For enhver endelig mængde $E \subseteq X$ er $\mu(E)$ lig antallet af elementer i E, og for enhver uendelig mængde $E \subseteq X$ er $\mu(E) = \infty$.) Lad endvidere $f: X \to \mathbb{C}$ være integrabel med hensyn til μ.

1° For hvert $n \in \mathbb{N}$ skal man vise, at mængden

$$A_n = \{x \in X \mid \frac{1}{n} \leqq |f(x)|\}$$

er endelig, og at dens elementantal ikke overstiger $n\int_X |f|d\mu$.

2° Bevis, at $\int_{X \setminus A_n} |f|d\mu \to 0$ for $n \to \infty$.

3° Bevis, at der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en endelig mængde $E \subseteq X$, således at

$$\left|\int_X f d\mu - \Sigma_{x \in F} f(x)\right| < \varepsilon$$

for enhver endelig mængde F, hvor $E \subseteq F \subseteq X$.

Opgave nr. 4.

Lad $\mathcal{V}$ være et vektorrum over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, med seminorm.

1° Antag, at $\mathcal{V}$ er fuldstændigt, dvs. at enhver Cauchy følge $s_1, s_2, \ldots$ med elementer $s_n \in \mathcal{V}$ er konvergent i $\mathcal{V}$. Vis, at enhver række $\Sigma_{j=1}^{\infty} a_j$ med led $a_j \in \mathcal{V}$, hvor $\Sigma_{j=1}^{\infty} \|a_j\| < \infty$, er konvergent i $\mathcal{V}$.

(opgaven fortsættes side 3)

(Opgave 4 fortsat fra forrige side)

2° Antag omvendt, at enhver række $\Sigma_{j=1}^{\infty} a_j$ med led $a_j \in \mathcal{V}$, hvor $\Sigma_{j=1}^{\infty} \|a_j\| < \infty$, er konvergent i $\mathcal{V}$. Vis, at $\mathcal{V}$ er fuldstændigt.

(Vink. For en given Cauchy følge $s_1, s_2, \ldots$ søges først en konvergent delfølge $s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots$.)

Opgave nr. 5.

Lad Fourier rækken for funktionen $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ være konvergent i punktet $x_o \in \mathbb{R}$ med summen s og lad $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{T})$ være differentiabel i x_o .

1° Antag her, at $g(x_o) = 0$, og vis da, at Fourier rækken for produktet fg er konvergent i x_o med summen 0.

(Vink. Man kan f.eks. benytte, at

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} \quad \text{for} \quad x \neq 0 \pmod{2\pi} \text{ .)}$$

2° Vis, at Fourier rækken for fg er konvergent i x_o , uanset værdien af $g(x_o)$, og bestem summen.