Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen.

Vinteren 1973-74.

Matematik 212. Mål- og integralteori.

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.

Prøven afholdes den 8. januar kl. 13-16.

## Opgave nr. 1.

$1^\circ$ Bevis, at funktionerne $x \rightharpoonup \sin nx$, $n = 1,2,\ldots,$ er parvis ortogonale i $\mathcal{L}_2(\,]0,\pi]\,)$.

$2^\circ$ Bestem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^1$, således at

$$\int_0^\pi |\cos x - \Sigma_{n=1}^2 a_n \sin nx|^2 dx$$

får den mindst mulige værdi. Find også denne.

## Opgave nr. 2.

Lad $\mathcal{U}$ være et fuldstændigt seminormeret vektorrum, lad $V$ være et normeret vektorrum og lad $T: \mathcal{U} \rightharpoonup V$ være en lineær afbildning af $\mathcal{U}$ ind i $V$, hvor

(opgaven fortsættes)

$$\forall u \in \mathcal{U}: \|Tu\| = \|u\|.$$

Bevis, at billedrummet $T(\mathcal{U})$ er afsluttet i $V$.

## Opgave nr. 3.

Lad $t_1, t_2, \dots$ tilhøre $\mathbb{R}_+$ og antag, at $t_n \to 0$ for $n \to \infty$.

$1^\circ$ Gør rede for, at $k_n = \frac{1}{t_n} \cdot 1_{]-t_n, 0]}$, $n = 1, 2, \dots$, er en Dirac følge for $\mathbb{R}$. (Med $1_A$ betegnes indikatorfunktionen for $A \subseteq \mathbb{R}$.)

$2^\circ$ Vis, at

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{F(x+t_n) - F(x)}{t_n} - f(x) \right| dx \underset{n\to\infty}{\to} 0 ,$$

når $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, og $F$ er et ubestemt integral af $f$.

## Opgave nr. 4.

$1^\circ$ Vis, at

$$\int_0^1 \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n} \, dr < \infty .$$

$2^\circ$ Beregn

$$\int_{D(0,\rho)} (x + iy)^n d(x,y),$$

idet $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$ og $D(0,\rho) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < \rho^2\}$.

$3^\circ$ For $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ sættes

(opgaven fortsættes)

$$f(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots .$$

(Rækkens konvergens kræves ikke begrundet.)

Vis, at funktionen $(x,y) \rightarrow f(x+iy)$ er Lebesgue integrabel i $D(0,1)$, og bestem

$$\int_{D(0,1)} f(x+iy)\, d(x,y).$$

Opgave nr. 5.

Lad $l$ være en ret linie i $\mathbb{R}^2$ givet ved en ligning

$$ax + by + c = 0 \quad \text{med} \quad a^2 + b^2 = 1$$

og lad os orientere normalen til $l$ ved vektoren $(a,b)$. For hvert $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ er $ax + by + c$ da som bekendt den med fortegn regnede afstand til $(x,y)$ fra linien $l$. Hvis $(x,y) \rightarrow ax + by + c$ er integrabel over $\mathbb{R}^2$ med hensyn til et Radon mål $\mu$ i $\mathbb{R}^2$, siges dette at have et moment med hensyn til $l$, nemlig (med den valgte orientering af normalen til $l$):

$$\int_{\mathbb{R}^2} (ax+by+c)\, d\mu(x,y).$$

---

Lad nu $\mu$ være et Radon mål i $\mathbb{R}^2$ med $0 < \mu(\mathbb{R}^2) = M < \infty$ og antag, at $\mu$ har momenter med hensyn til 2 hinanden skærende rette linier $l_1$ og $l_2$ i $\mathbb{R}^2$.

$1^\circ$ Bevis, at $\mu$ har momenter med hensyn til de rette linier med ligning $x = 0$, henholdsvis $y = 0$.

$2^\circ$ Bevis, at $\mu$ har et moment med hensyn til enhver ret

(opgaven fortsættes)

linie i $\mathbb{R}^2$.

3° Bevis, at der findes et og kun et Radon mål $\nu$, der er koncentreret i ét punkt $(x_0, y_0)$, dvs. $\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}) = 0$, og som har samme moment som $\mu$ om enhver ret linie $l$ i $\mathbb{R}^2$ med orienteret normal.