Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1981 - 82.

MATEMATIK 211.

(GAMMELT PENSUM).

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

Giv en redegørelse for begrebet kvotientring, idet følgende punkter ønskes indraget:

1. Ideal og kvotientring.
2. Den kanoniske homomorfi.
3. Udvidelsessætningen for ringe.
4. Isomorfisætningen for ringe.
5. Noethers isomorfisætning for ringe.

Giv ved hjælp af kvotientringe en karakterisering af maksimalidealerne i en kommutativ ring. Begrund for et primtal p, at kvotientringen $\mathbb{Z}/(p)$ er et legeme med p elementer.

Opgave nr. 2.

Lad L være et legeme, og lad $f = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ være et normeret polynomium i $L[X]$ af grad $n \geq 1$. Vis, at $L[X]$ er et hovedidealområde. Vis, at f er et produkt af irreducible polynomier. Vis, at hovedidealet frembragt af et irreducibelt polynomium i $L[X]$ er et maksimalideal. Vis, at der findes et legeme K og n elementer $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ og en indlejring : $L \hookrightarrow K$, således at der i $K[X]$ gælder:

$$f = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n).$$

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder om der vises overblik. Alle anførte påstande behøver ikke nødvendigvis at bevises.

Korrekt besvarelse af én opgave giver højeste karakter.