Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1978 - 79

MATEMATIK 211.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

Som grundlæggende egenskaber ved mængden af naturlige tal $\mathbb{N}$, det udvalgte element $1 \in \mathbb{N}$ og efterfølgerafbildningen $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x) = x^+$ regnes i det følgende sætningen om definition ved induktion, induktionsaksiomet og uendelighedsaksiomet.

(i) Lad a være element i en semigruppe $(M,\cdot)$. Gør rede for hvorledes de grundlæggende egenskaber fører til definitionen af potenser a^x med naturlig exponent $x \in \mathbb{N}$. Gør rede for hvorledes addition og multiplikation af naturlige tal defineres og bevis for en kommutativ semigruppe $(M,\cdot)$ de tre potensregler. [Egenskaber ved addition og multiplikation af naturlige tal, der er nødvendige herfor, må ligeledes bevises.]

(ii) Lad a være element i en kommutativ gruppe $(M,\cdot)$. Gør rede for hvorledes en udvidelsessætning fører til definitionen af potenser a^x med hel exponent $x \in \mathbb{Z}$, og begrund for denne situation de tre potensregler.

(iii) Lad a være element i en kommutativ, entydigt delelig gruppe $(M,\cdot)$. Gør rede for hvorledes en udvidelsessætning fører til definitionen af potenser a^x med rational exponent $x \in \mathbb{Q}$, og begrund for denne situation de tre potensregler.

[Konstruktionerne, der fører fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{Z}$ og fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Q}$, ønskes ikke gennemført, og de pågældende udvidelsessætninger ønskes ikke bevist.]

(opgavesættet fortsættes på side 2)

Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1978-79

MATEMATIK 211

Opgave nr. 2.

Lad L være et legeme, og lad $f = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ være et normeret polynomium i $L[X]$ af grad $n \geqslant 1$. Vis, at $L[X]$ er et hovedidealområde. Vis, at f er et produkt af irreducible polynomier. Vis, at hovedidealet frembragt af et irreducibelt polynomium i $L[X]$ er et maksimal-ideal. Vis, at der findes et legeme K og n elementer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ og en indlejring : $L \hookrightarrow K$, således at der i $K[X]$ gælder:

$$f = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n).$$

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder om der vises overblik. Alle anførte påstande behøver ikke nødvendigvis at bevises.

Korrekt besvarelse af én opgave giver højeste karakter.