Københavns universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1977-78.

MATEMATIK 211.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

Lad L være et legeme, og lad $f = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ være et normeret polynomium i $L[X]$ af grad $n \geq 1$. Vis, at $L[X]$ er et hovedidealområde. Vis, at f er et produkt af irreducible polynomier. Vis, at hovedidealet frembragt af et irreducibelt polynomium i $L[X]$ er et maksimalideal. Vis, at der findes et legeme K og n elementer $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ og en indlejring: $L \hookrightarrow K$, så at der i $K[X]$ gælder:

$$f = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n).$$

Opgave nr. 2.

Lad der være givet en kommutativ semigruppe $(H, \cdot)$. Beskriv, hvorledes man i denne situation konstruerer brøkgruppen $(H[H^{-1}], \cdot)$ og den kanoniske homomorfi: $H \to H[H^{-1}]$, og bevis en udvidelsessætning, der gælder for denne konstruktion. Vis, at konstruktionen kan anvendes til at konstruere de hele tals gruppe ud fra de naturlige tal, og gør rede for hvordan de hele tal ordnes. [En disposition kan f. eks. indeholde nogle af følgende punkter: ① Komposition og ækvivalensrelation i $H \times H$. ② Definition af $H[H^{-1}]$. ③ Homomorfien $H \to H[H^{-1}]$. ④ Udvidelsessætning. ⑤ Forkortningsreglen. ⑥ Definition af $(\mathbb{Z}, +)$. ⑦ Indlejringen $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$. ⑧ Ordning i $\mathbb{Z}$.]

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder om der vises overblik. Alle anførte påstande behøver ikke nødvendigvis at bevises.

Korrekt besvarelse af én opgave giver højeste karakter.