KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1974

MATEMATIK 2 - (MATEMATIK C)

Skriftlig prøve 2

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.

Prøven afholdes den 16. maj kl. 9-13.

Opgave nr. 1

Lad $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $\varphi(x,y) = x$.

1° Bestem det mål ν på Borel algebraen i $\mathbb{R}$, hvori Lebesgue målet i $\mathbb{R}^2$ transformeres ved afbildningen φ .

2° Vis, at for enhver Borel funktion $f: \mathbb{R} \to [0,\infty]$ er integralet $\int_{\mathbb{R}} f d\nu$ enten 0 eller ∞ .

Opgave nr. 2

Lad T betegne operatoren i $L_2(0,\pi)$ givet ved

$$Tf(x) = \int_0^{\pi} \cos(x+y)\, f(y)dy .$$

1° Bestem billedmængden for T .

2° Bestem spektret $\sigma(T)$ for T .

Opgave nr. 3

1° Find $\int_{C(0,1)} (\frac{1}{z} - \sin \frac{1}{z}) dz.$

(opgaven fortsættes)

2° Find $\int_0^1 (\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x})dx$ og $\int_1^\infty (\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x})dx$.
(Værdien af det sidste integral kan angives som sum af en række.)

Opgave nr. 4

Idet $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, sætter vi $Tf = T_g f = g*f$ for $f \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})$.

1° Gør rede for, at T er en kontinuert, lineær afbildning af $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})$ ind i rummet $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ af begrænsede, kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$, når begge rum betragtes med $\| \|_\infty$.

2° Bestem operatornormen $\|T\|$.

Opgave nr. 5

Lad f og g være komplekst differentiable funktioner defineret i en omegn af $0 \in \mathbb{C}$ og med nulpunkter i 0 af orden henholdsvis $p \geqq 1$ og $q \geqq 1$, altså

$$\mathrm{ord}(f,0) = p \geqq 1, \quad \mathrm{ord}(g,0) = q \geqq 1 .$$

Bestem $\mathrm{ord}(g \circ f, 0)$.

Opgave nr. 6

Lad $B_1 \subseteqq B_2 \subseteqq \ldots$ være en stigende følge af Borel mængder på $\mathbb{R}$ og antag, at $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ har Lebesgue mål $m(B) < \infty$.

(opgaven fortsættes)

Vis, at følgen $\mathcal{F}1_{B_1}, \mathcal{F}1_{B_2}, \cdots$ af Fourier transformerede af indikatorfunktionerne $1_{B_1}, 1_{B_2}, \cdots$ for $B_1, B_2, \cdots$ konvergerer både uniformt og i 2-middel mod $\mathcal{F}1_B$.

Opgave nr. 7

1° Antag $0 < r < 1$. Vis, at

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}r^n\cos nx = r\cos x - \frac{1}{2}r^2\cos 2x + \frac{1}{3}r^3\cos 3x - \cdots$$

er Fourier række for en kontinuert funktion $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med periode 2π . Find funktionen f_r og angiv den ved et funktionsudtryk inden for det reelle.

2° Vis, at $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-r^n)^2 \to 0$ for $r \to 1_-$.

3° Vis, at $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cos nx$ er Fourier række for en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med periode 2π , og bestem en sådan funktion f .