Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

4

Sommeren 1974.

MATEMATIK 2, første sæt

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1

For en endelig gruppe $(G,\cdot)$ med neutralelement e sættes $f(n) = f_G(n)$ lig antallet af $x \in G$ for hvilket $x^n = e$ (n betegner et naturligt tal).

Vis at dersom $(G,\cdot)$ er direkte produkt af $(A,\cdot)$ og $(B,\cdot)$, så er $f_G(n) = f_A(n)\cdot f_B(n)$.

Vis, at for fast $(G,\cdot)$ vil $m|n$ medføre at $f(m) \leq f(n)$, og at man for abelske grupper endda har $f(m)|f(n)$. Godtgør ved et eksempel, at forudsætningen "abelsk" ikke er overflødig for den sidstnævnte relation.

Vis, at dersom $(m,n) = 1$ gælder $f(mn) \leq f(m)\cdot f(n)$ (vink: vis, at dersom $x^{mn} = e$, så findes et ved x bestemt par (y,z) af elementer, som begge er potenser af x og hvor $yz = zy = x$ og $y^m = z^n = e$). Godtgør at for abelske grupper gælder lighedstegnet i uligheden og giv et eksempel på at det ikke behøver at gælde for ikke-abelske.

Opgave nr. 2

(både A) og B) ønskes løst).

A) Vis, at dersom en ring $(M,+,\cdot)$ med etelement e og nulelement 0 har et ulige antal invertible (regulære) elementer,

(opg. fortsættes)

så har ringen karakteristik 2 (d.v.s. at $e + e = 0$).
Antag at $(M,+,\cdot)$ har netop 5 invertible elementer, og lad r være et af disse, $r \neq e$. Gør rede for at samtlige invertible elementer kan udtrykkes ved r, og angiv udtrykkene.
Vis, at der ikke findes nogen ring med netop 5 invertible elementer (vis f.eks. først, at antagelsen medfører at $(r + e + r^{-1})^3 = e$).

B) Lad c være algebraisk over Q.
For ethvert legeme M, hvor $Q \subseteq M \subseteq Q(c)$ skal $p_M(x)$ betegne det irreducible moniske polynomium i $M[X]$, som har c som rod.
Vis, at dersom $Q \subseteq L \subset M \subseteq Q(c)$, så vil $p_M(x)$ gå op i $p_L(x)$, og endvidere at graden af $p_M(x)$ er skarpt mindre end graden af $p_L(x)$. Godtgør at hvis K er det mindste legeme så $p_M(x) \in K[X]$, så er $K = M$.
Benyt den viste forbindelse mellem M og $p_M(x)$ til at begrunde at antallet af legemer M, hvor $Q \subseteq M \subseteq Q(c)$, ikke kan overstige 2^n, hvor n er graden af $p_Q(x)$.

Opgave nr. 3

Lad f være en komplekst differentiabel funktion defineret i en halvplan $\{z = x+iy \mid y > a\} \subset \mathbb{C}$ med $a < 0$ og antag, at

(opg. fortsættes)

$$K = \sup_{y \geqq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx < \infty .$$

1° Lad et tal $b \in \mathbb{R}_+$ være givet og sæt

$$G(x) = \int_0^b |f(x+iy)|^2 dy , x \in \mathbb{R} .$$

Vis, at $\int_{-\infty}^{\infty} G(x)dx < \infty$, og at

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x > n: G(x) + G(-x) < \frac{1}{n} .$$

2° En talfølge $x_1, x_2, \cdots$ i $\mathbb{R}_+$ tænkes nu valgt, således at

$$x_n \to \infty , \quad G(x_n) \to 0 \text{ og } G(-x_n) \to 0 \text{ for } n \to \infty .$$

Begrund eksistensen af en sådan følge.
Vis for hvert $t \in \mathbb{R}$, at

$$\int_{[x_n \to x_n + ib]} f(z)e^{-2\pi i t z} dz \to 0 \text{ for } n \to \infty .$$

(Det samme gælder med $-x_n$ i stedet for x_n, hvilket kan benyttes i det følgende uden begrundelse.)

3° Vis for hvert $t \in \mathbb{R}$, at

$$\int_{-x_n}^{x_n} f(x)e^{-2\pi i t x} dx - e^{2\pi b t}\int_{-x_n}^{x_n} f(x+ib)e^{-2\pi i t x} dx \underset{n \to \infty}{\to} 0 .$$

4° For $y = 0$ og $y = b$ sætter vi $f_y(x) = f(x+iy)$, $x \in \mathbb{R}$, og betegner med g_y (en repræsentant for) den Fourier/Plancherel transformerede $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} f_y$.

(Opg. fortsættes)

Gør rede for, at

$$g_0(t) = e^{2\pi b t} g_b(t) \quad \text{for næsten alle} \quad t \in \mathbb{R} \ ,$$

og at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi b t} |g_0(t)|^2 dt \leqq K \ .$$

5° Vis, at $g_0(t) = 0$ for næsten alle $t < 0$.