Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen.

Vinteren 1973-74.

Matematik 2 - (Matematik C).

Skriftlig prøve 2.

Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes.

Prøven afholdes den 8. januar kl. 13-17.

Opgave nr. 1

1° Bevis, at funktionerne $x \rightarrow \sin nx$, $n = 1,2,\dots,$ er parvis ortogonale i $\mathcal{L}_2(]0,\pi])$.

2° Bestem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, således at

$$\int_0^\pi \left| \cos x - \Sigma_{n=1}^2 a_n \sin nx \right|^2 dx$$

får den mindst mulige værdi. Find også denne.

Opgave nr. 2.

Lad $\mathcal{U}$ være et fuldstændigt seminormeret vektorrum, lad V være et normeret vektorrum og lad $T: \mathcal{U} \rightarrow V$ være en lineær afbildning af $\mathcal{U}$ ind i V, hvor

(opgaven fortsættes)

$$\forall u \in \mathcal{U}: \|Tu\| = \|u\|.$$

Bevis, at billedrummet $T(\mathcal{U})$ er afsluttet i V.

Opgave nr. 3.

Lad $t_1, t_2, \ldots$ tilhøre $\mathbb{R}_+$ og antag, at $t_n \to 0$ for $n \to \infty$.

1° Gør rede for, at $k_n = \frac{1}{t_n} \cdot 1_{]-t_n, 0]}$, $n = 1, 2, \ldots$, er en Dirac følge for $\mathbb{R}$. (Med 1_A betegnes indikatorfunktionen for $A \subseteq \mathbb{R}$.)

2° Vis, at

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{F(x+t_n) - F(x)}{t_n} - f(x) \right| dx \underset{n\to\infty}{\to} 0 ,$$

når $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, og F er et ubestemt integral af f.

Opgave nr. 4.

1° Vis, at

$$\int_0^1 \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n} \, dr < \infty .$$

2° Beregn

$$\int_{D(0,\rho)} (x + iy)^n d(x,y),$$

idet $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$ og $D(0,\rho) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < \rho^2\}$.

(opgaven fortsættes)

3° Vis, at funktionen $(x,y) \rightarrow \log_0(1+x+iy)$ er Lebesgue integrabel i $D(0,1)$, og bestem

$$\int_{D(0,1)} \log_0(1+x+iy)\, d(x,y).$$

(Vink. Man kan benytte, at

$$\log_0(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

for $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.)

Opgave nr. 5.

Lad l være en ret linie i $\mathbb{R}^2$ givet ved en ligning

$$ax + by + c = 0 \quad \text{med} \quad a^2 + b^2 = 1$$

og lad os orientere normalen til l ved vektoren (a,b). For hvert $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ er $ax + by + c$ da som bekendt den med fortegn regnede afstand til (x,y) fra linien l. Hvis $(x,y) \rightarrow ax + by + c$ er integrabel over $\mathbb{R}^2$ med hensyn til et Radon mål μ i $\mathbb{R}^2$, siges dette at have et moment med hensyn til l, nemlig (med den valgte orientering af normalen til l):

$$\int_{\mathbb{R}^2} (ax+by+c)\, d\mu(x,y).$$

Lad nu μ være et Radon mål i $\mathbb{R}^2$ med $0 < \mu(\mathbb{R}^2) = M < \infty$ og antag, at μ har momenter med hensyn til 2 hinanden skærende rette linier l_1 og l_2 i $\mathbb{R}^2$.

(opgaven fortsættes)

1° Bevis, at μ har momenter med hensyn til de rette linier med ligning $x = 0$, henholdsvis $y = 0$.

2° Bevis, at μ har et moment med hensyn til enhver ret linie i $\mathbb{R}^2$.

3° Bevis, at der findes et og kun et Radon mål ν, der er koncentreret i ét punkt (x_o, y_o), dvs. $\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_o, y_o)\}) = 0$, og som har samme moment som μ om enhver ret linie l i $\mathbb{R}^2$ med orienteret normal.

Opgave nr. 6.

Lad $R \in \mathbb{R}_+$. Vis, at der findes et $N \in \mathbb{N}$, således at polynomiet

$$P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

ikke har noget nulpunkt i cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, når $n > N$.

Opgave nr. 7.

Lad T være en selvadjungeret kontinuert lineær operator i et Hilbert rum H, lad V være et afsluttet underrum af H og antag $T(V) \subseteq V$.

1° Vis, at $T(V^\perp) \subseteq V^\perp$.

2° Vis, at

$$\rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(T_2) ,$$

(opgaven fortsættes)

hvor $\rho(T)$, $\rho(T_1)$ og $\rho(T_2)$ er resolventmængden for T, henholdsvis for restriktionerne $T_1 = T|_V$ og $T_2 = T|_{V^\perp}$ af T til V og til $V^\perp$.