KØBENHAVNS UNIVERSITET 4. januar 1974

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 73-74.

MATEMATIK 2, første sæt.

4. timer. Hjælpemidler tilladt.

Opgave nr. 1.

(Både A) og B) ønskes løst)

A) Man betragter ringen bestående af de endelige decimalbrøker (en delring af $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$).

Angiv ringens regulære (invertible) elementer, dens irreducible elementer og dens reducible elementer.

Bevis, at det er en hovedidealring, og at ethvert ideal har et frembringerelement $\in \mathbb{Z}$.

Angiv samtlige primidealer, endvidere samtlige maximalidealer, og endelig ringens brøklegeme.

B) Lad α være rod i det irreducible polynomium $A(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg A(X) = p$, og lad β være rod i det irreducible polynomium $B(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg B(X) = q$. Her betegner p og q to forskellige primtal.

1) Vis, at graden $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}] = pq$.

(opg. fortsættes)

2) Vis, at hvis $[\dot{Q}(\alpha\beta): \dot{Q}] = p$ så vil $A(\frac{X}{\beta})$ tilhøre $\dot{Q}[X]$ (vink: vis og benyt at $[\dot{Q}(\alpha\beta,\beta): \dot{Q}(\beta)] = p$ og at $\alpha\beta$ er rod i $A(\frac{X}{\beta})$ som er et polynomium over $\dot{Q}(\beta)$). Vis at så vil $X^p - \beta^p$ tilhøre $\dot{Q}[X]$ og at dette polynomium er deleligt med $B(X)$.

Opgave nr. 2.

Man betragter en endelig abelsk gruppe. Godtgør at enhver primtalpotens som går op i en elementorden også selv er elementorden.

Vis, at hvis elementerne A og B har ordener hhv. r og s, hvor $(r,s) = 1$, så er $\mathrm{ord}(AB) = rs$.

Vis udfra det foregående, at hvis m betegner det mindste fælles multiplum af de i gruppen forekommende elementordener, så er m selv også elementorden.

Benyt dette til at vise sætningen: I et endeligt kommutativt legeme er den multiplikative gruppe cyklisk. (vink: betragt polynomiet $X^m - E$, hvor E betegner legemets etelement).

Angiv i gruppen $(\dot{Z}_7 \setminus \{ 0 \}, \cdot)$ et frembringerelement f og skriv gruppens elementer a som potenser af dette (her betyder a den restklasse modulo 7 som indeholder repræsentanten a, $0 \leq a < 7$).

(opgavesættet fortsættes)

Mat 2, 1. skriftlige prøve, 4. januar 1974.

Opgave 3

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være givet ved

$$f(x) = \frac{1}{1 + ix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1° Gør rede for, at $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}(\mathbb{R})$, og bestem $\|f\|_2$.

2° For givet $a \in \mathbb{R}_+$ betegner vi med I_{n1}, I_{n2} og I_{n3}, henholdsvis J_{n1}, J_{n2} og J_{n3}, de komplekse kurveintegraler af

$$z \to \frac{e^{iaz}}{z - i}, \quad \text{henholdsvis} \quad z \to \frac{e^{iaz}}{z + i},$$

langs de orienterede liniestykker $[-n \to -n + in]$, $[-n + in \to n + in]$ og $[n \to n + in]$, $n=2,3,\ldots$.

Bevis, at $I_{n2} \to 0$ for $n \to \infty$, og at $I_{n3} \to 0$ for $n \to \infty$.

I det følgende kan uden begrundelse benyttes, at også I_{n1}, J_{n1}, J_{n2} og J_{n3} konvergerer mod 0 for $n \to \infty$.

3° For hvert $t \in \mathbb{R}$ skal man vise, at

$$\int_{-n}^{n} \frac{e^{-2\pi i t x}}{1 + ix}\, dx$$

har en grænseværdi for $n \to \infty$, samt bestemme denne.

(Vink. Opdel i tilfældene $t<0$, $t>0$ og $t=0$.)

4° Bestem den Fourier/Plancherel transformerede $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} f$.