Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1973

MATEMATIK 2 - (MATEMATIK C)

Skriftlig prøve 2

Hjælpemidler kan ikke medbringes

Prøven afholdes den 22. maj kl. 14-18

Opgave nr. 1

Lad $(X, \mathcal{X}, \mu)$ være et målrum og lad $f: X \to \mathbb{C}$ være en $\mathcal{X}$-målelig funktion, som ikke μ-næsten overalt er 0.

Bevis, at der findes tal $a,b \in \mathbb{R}_+$, således at

$$\mu(\{x \in X \mid a < |f(x)| < b\}) > 0 .$$

Opgave nr. 2

Lad $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en Borel funktion og antag

$$\forall x,y \in \mathbb{R}: \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{samt} \quad \forall x \in \mathbb{R}: |\varphi(x)| = 1 .$$

1° Vis, at φ for vilkårligt $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ er egenfunktion (egenvektor) ved den lineære afbildning $f \to f*g$, $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$.

2° Vis, at der findes et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, således at $\varphi*g(0) \neq 0$.

3° Er φ nødvendigvis kontinuert ? Begrund svaret.

(Fortsættes)

Opgave nr. 3

Bestem operatornormen $\|\mathcal{F}\|$ for Fourier transformationen $\mathcal{F}: L(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, idet $L(\mathbb{R})$ betragtes med 1-normen og $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ med den uniforme norm (supremum normen).

Opgave nr. 4

Lad H være et uendelig-dimensionalt, separabelt Hilbert rum og lad $T: H \to H$ være en selvadjungeret kompakt lineær operator.

Bevis, at der findes en følge $T_1, T_2, \dots$ af kontinuerte lineære operatorer $T_n: H \to H$ med endelig-dimensionale billedrum $T_n(H)$, således at

$$\|T - T_n\| \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Opgave nr. 5

Bestem ordenen i 0 samt den principale del i 0 af

$$\frac{e^z}{1 - \cos z} .$$

Opgave nr. 6

1° Tegn en skitse af den simple lukkede vej $\varphi: [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}] \to \mathbb{C}$, hvor

(Opgaven fortsættes)

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 + 2i\sin t & \text{for } -\frac{\pi}{3} \leqq t \leqq \frac{\pi}{3} \\ 2\cos t + 2i\sin t & \text{for } \frac{\pi}{3} \leqq t \leqq \frac{5\pi}{3} \end{cases},$$

og markér de nulpunkter for $\sin(z^3)$, der ligger inden for φ.

2^o Find omløbstallet om 0 for vejen $f \circ \varphi$, når f er givet ved

a) $f(z) = \sin(z^3)$, b) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z^3)}$.

Opgave nr. 7.

Lad $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ have begrænset støtte. Med et passende $a \in \mathbb{R}_+$ gælder altså

$$f(x) = 0 \quad \text{for} \quad |x| > a .$$

1^o Gør rede for, at $x \rightharpoonup f(x)e^{\zeta x}$, $x \in \mathbb{R}$, tilhører $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ for ethvert $\zeta \in \mathbb{C}$.

2^o Bevis, at $F: \mathbb{C} \rightharpoonup \mathbb{C}$ defineret ved

$$F(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{\zeta x}dx , \quad \zeta \in \mathbb{C} ,$$

er en hel funktion, d.v.s. er komplekst differentiabel i hvert punkt af $\mathbb{C}$. (Vink: Man kan betragte differenskvotienten svarende til tilvækster $h_1, h_2, \ldots \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ med $h_n \to 0$.)

(Opgaven fortsættes)

Københavns universitet
Sommeren 1973
Mat. 2 - (Mat. C)

3° Gør rede for, at den Fourier transformerede $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kan fremstilles ved en potensrække,

$$\mathcal{F}f(t) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \in \mathbb{R} .$$