Københavns universitet
Matematik 2, første sæt
Sommeren 1973

Opgave nr. 3

Med $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(0,2\pi)$ betegner vi mængden af Borel funktioner $f\colon]0,2\pi] \to \mathbb{C}$ med $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Ved at benytte skalarproduktet

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

og samle funktionerne i klasser ved ækvivalensrelationen

$$f \sim g \iff f = g \text{ næsten overalt}$$

får vi som bekendt et Hilbert rum $L_2 = L_2(0,2\pi) = \{[f] \mid f \in \mathscr{L}_2(0,2\pi)\}$.

1° Vi lader $V \subseteq L_2(0,2\pi)$ bestå af de klasser, der har en repræsentant $f\colon]0,2\pi] \to \mathbb{C}$, hvor

$$(*) \qquad \forall x \in]0,\pi]: \; f(x+\pi) = f(x) .$$

Gør rede for, at V er et afsluttet underrum af $L_2(0,2\pi)$.

2° Funktionerne φ og ψ er defineret på $]0,2\pi]$ ved

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \quad \text{for} \quad 0 < x \leqq 2\pi ,$$

$$\psi(x+\pi) = \psi(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \quad \text{for} \quad 0 < x \leqq \pi .$$

Skitsér funktionernes grafer. Vis, at $[\psi]$ er den ortogonale projektion af $[\varphi]$ på V.

(Opgaven fortsættes)

Københavns universitet
Matematik 2, første sæt
Sommeren 1973

3^{o} Bestem

$$\inf \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - f(x)|^2 dx ,$$

a) idet infimum tages over alle $f \in \mathscr{L}_2(0,2\pi)$, der opfylder (*).

b) idet infimum tages over alle kontinuerte funktioner $f\colon \,]0,2\pi] \to \mathbb{C}$, der opfylder (*).
Antages infimum i sidstnævnte tilfælde? Begrund svaret.

4^{o} Angiv (med begrundelse) en ortonormal basis i V. Bestem det ortogonale komplement $V^{\perp}$ til V i $L_2(0,2\pi)$ og beskriv det så elementært som muligt.