Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1973

MATEMATIK 2, første sæt

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

(Både A) og B) ønskes løst)

A) Man betragter polynomiet $X^3 + aX^2 + bX + c$ over $\mathbb{C}$.
Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, som koefficienterne a, b og c må opfylde, for at en af rødderne skal være lig summen af de to andre (vink: udtryk betingelsen v.hj.a. en passende symmetrisk funktion af rødderne).

B) På et endeligt kommutativt legeme $(L,+,\cdot)$ betragtes mængden F af afbildninger $f: L \to L$, for hvilke $f(0) = 0$.
På F skal $+$ betegne sædvanlig funktionsaddition, og kompositionen $h = f * g$ defineres ved $h(a) = \Sigma f(b)g(c)$, hvor der summeres over alle $(b,c) \in L \times L$, for hvilke $bc = a$. Derved fremkommer en kommutativ ring $(F,+,*)$ (forlanges ikke eftervist).

(Opgaven fortsættes)

Ringen $(F,+,*)$ har et etelement, angiv dette.

Vis, at mængden

$$\{f \mid \sum_{a \in L} a^2 f(a) = 0\}$$

er et ideal i ringen, f.eks ved at godtgøre, at det er kerne for en homomorf afbildning af ringen.

Opgave nr. 2.

Lad $(G,\cdot)$ være en endelig gruppe med neutralelement e, og således beskaffen, at for ethvert $g \in G$ er mængden af elementer som kommuterer med g netop $\{g, e, g^{-1}\}$.
Vis, at for ethvert $g \in G$ er ord $g = 1,2$ eller 3.
Vis, at dersom der findes to forskellige elementer af orden 2, så er deres produkt af orden 3.
På mængden af elementer i G sættes $a \sim b$ ("a konjugeret med b") dersom der findes et $x \in G$ så $xax^{-1} = b$; så er $\sim$ en ækvivalensrelation (forlanges ikke eftervist).
Vis, at elementerne $a, b, \cdots$ i en ækvivalensklasse er af samme orden, og at deres antal er $\frac{\text{ord } G}{\text{ord } N_a}$, hvor
$N_a = \{x \mid xax^{-1} = a\}$.
Vis, at antallet af elementer af orden 2 er et helt multiplum af $\frac{\text{ord } G}{2}$, og begrund et tilsvarende udtryk for antallet elementer af orden 3.
Benyt det fundne til at vise, at der eksisterer netop fire ikke isomorfe grupper - som ønskes angivet - af den omhandlede art.

(Forts.)

Københavns universitet
Matematik 2, første sæt
Sommeren 1973

Opgave nr. 3

Med $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(0,2\pi)$ betegner vi mængden af Borel funktioner $f\colon\,]0,2\pi] \to \mathbb{C}$ med $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Ved at benytte skalarproduktet

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

og samle funktionerne i klasser ved ækvivalensrelationen

$$f \sim g \iff f = g \text{ næsten overalt}$$

får vi som bekendt et Hilbert rum $L_2 = L_2(0,2\pi) = \{[f] \mid f \in \mathscr{L}_2(0,2\pi)\}$.

1° Vi lader $V \subseteq L_2(0,2\pi)$ bestå af de klasser, der har en repræsentant $f\colon\,]0,2\pi] \to \mathbb{C}$, hvor

$$(*) \quad \forall x \in\,]0,\pi]\colon\ f(x+\pi) = f(x) .$$

Gør rede for, at V er et afsluttet underrum af $L_2(0,2\pi)$.

2° Funktionerne φ og ψ er defineret på $]0,2\pi]$ ved

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \quad \text{for} \quad 0 < x \leqq 2\pi ,$$

$$\psi(x+\pi) = \psi(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \quad \text{for} \quad 0 < x \leqq \pi .$$

Skitsér funktionernes grafer. Vis, at $[\psi]$ er den ortogonale projektion af $[\varphi]$ på V.

(Opgaven fortsættes)

3° Bestem

$$\inf \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - f(x)|^2 dx ,$$

a) idet infimum tages over alle $f \in \mathcal{L}_2(0,2\pi)$, der opfylder (*).

b) idet infimum tages over alle kontinuerte funktioner $f\colon]0,2\pi] \to \mathbb{C}$, der opfylder (*).

Antages infimum i sidstnævnte tilfælde ? Begrund svaret.

4° Angiv (med begrundelse) en ortonormal basis i V. Bestem det ortogonale komplement $V^\perp$ til V i $L_2(0,2\pi)$ og beskriv det så elementært som muligt.