Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1972-73

MATEMATIK 2 - (MATEMATIK C)

Skriftlig prøve 2

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Eksamen afholdes den 8. januar kl. 9-13.

Opgave nr. 1

Lad $\mathcal{S}$ være en σ-algebra i en mængde E, og lad $\mathcal{B}$ betegne den mindste σ-ring, der omfatter alle åbne mængder i $\mathring{C}$.

Idet $f = f_1+if_2$, hvor $f_1 : E \to \mathring{R}$ og $f_2 : E \to \mathring{R}$ er målelige med hensyn til $\mathcal{S}$, skal man vise, at $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ for enhver mængde $B \in \mathcal{B}$.

Opgave nr. 2

Lad $f: \mathring{R}^2 \to \mathring{R}$ være Lebesgue målelig. Vis:

1° Der findes en følge af Lebesgue integrable funktioner $f_n: \mathring{R}^2 \to \mathring{R}$, $n=1,2,\dots$, så

$$\forall (x,y) \in \mathring{R}^2 : f(x,y) = \lim_n f_n(x,y) .$$

2° For næsten alle $x \in \mathring{R}$ er $f(x,\cdot)$ Lebesgue målelig. (Med $f(x,\cdot)$ betegnes for givet $x \in \mathring{R}$ funktionen

$$y \to f(x,y), \ y \in \mathring{R} .)$$

(Fortsættes)

Opgave nr. 3

Lad $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ være kontinuert.

Vis, at f er essentielt opadtil begrænset, hvis og kun hvis f er opadtil begrænset, og vis i bekræftende fald, at

$$\text{ess. sup } f = \sup f \ .$$

Opgave nr. 4

Lad $(d_1, d_2, \cdots)$ være en kompleks talfølge.

1° Vis, at

$$(x_1, x_2, \cdots) \to (d_1 x_1, d_2 x_2, \cdots), \quad (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

er en unitær afbildning af l^2 på sig selv, hvis og kun hvis

$$|d_n| = 1 \quad \text{for ethvert } n \in \mathbb{N} \ .$$

Lad S og T være operatorer i l^2 givet ved henholdsvis

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots) \to (0, a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots) \ ,$$

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots) \to (0, b_1 x_1, b_2 x_2, \cdots) \ ,$$

hvor $(a_1, a_2, \cdots)$ og $(b_1, b_2, \cdots)$ er begrænsede komplekse talfølger. Det antages, at

$$|a_n| = |b_n| > 0 \quad \text{for ethvert } n \in \mathbb{N} \ .$$

(Opgaven fortsættes)

2° Vis, at S er unitært ækvivalent med T .

Opgave nr. 5

Bestem for hvert $x \in \mathbb{R}$ summen af rækkerne

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)!} = \cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} - \dots ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)!} = \sin x - \frac{\sin 3x}{3!} + \frac{\sin 5x}{5!} - \dots .$$

Resultaterne ønskes på en form, hvor kun reelle størrelser indgår.

Opgave nr. 6

Bestem for hvert $a \in \mathbb{C}$ ordenen i 0 af funktionen

$$z \to \frac{(\cos az)^2}{\sin z} - \frac{1}{z} .$$

Opgave nr. 7

Bestem antallet af nulpunkter i den åbne cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ for hvert af polynomierne P og Q , hvor

$$P(z) = z^9 + 3z - 1 ,$$

$$Q(z) = 2z^9 + 3z - 1 .$$