Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1972-73

MATEMATIK 2, første sæt

Skriftlig prøve.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1.

(Både A) og B) ønskes løst)

A) For polynomiet $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ er givet at $\deg p = 5$, og at $p(X)$ har netop én reel rod α, og at denne er irrational. Lad L være et legeme $(L \subseteq \mathbb{C})$, således at man i $L[X]$ kan skrive $p(X)$ som produkt af førstegradspolynomier. Vis, at $[L : \mathbb{Q}] > 5$. Gælder det også, at $[L : \mathbb{Q}] > 6$?

B) Ved den kanoniske afbildning af $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ på $(\mathbb{Z},+,\cdot)/(12) = (\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ vil idealet (3) afbildes på en delring af $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$. Denne ring har et etelement, som ønskes angivet.
Antag $d|n$. Vis, at $(d,\frac{n}{d}) = 1$ er nødvendigt for at den kanoniske afbildning af $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ på $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ fører (d) over i en ring med et etelement,

(Opgaven fortsættes)

og gør rede for om betingelsen også er tilstrækkelig.

Opgave nr. 2

For en gruppe $(G,\cdot)$ af orden n betragtes mængden $\mathfrak{M}$ af delmængder M med m elementer og indeholdende neutralelementet e (altså $e \in M \subseteq G$).
For $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$ sættes $M_1 \sim M_2$ dersom der findes et $a \in G$ så $aM_1 = M_2$. Vis, at $\sim$ er en ækvivalensrelation.
Vis, at for fast $M \in \mathfrak{M}$ er $\{a \mid aM = M\}$ en undergruppe A_M i $(G,\cdot)$, og at $A_M = M$ hvis, og kun hvis, M er undergruppe.
Vis også, at for $M \sim M_1$ er $\{a \mid aM = M_1\}$ en sideklasse til A_M ; benyt dette til at vise at antallet M_1 som er ækvivalente med M er en divisor i m.
Vis udfra det nævnte, at for en primtalpotens p^h er $\binom{n-1}{p^h-1} \equiv$ (antallet undergrupper i G af orden p^h) (mod p), (hvor $\binom{r}{s}$ som sædvanlig betyder antallet af måder man kan udtage s elementer blandt r).

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3.

For $f,g \in L^2(I)$, hvor $I = [0,2\pi]$, sættes

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)dx \quad .$$

Videre sættes $\varepsilon_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ for $n \in \mathbb{Z}$, $x \in [0,2\pi]$, medens $S: L^2(I) \to L^2(I)$ og $T: L^2(I) \to L^2(I)$ er kontinuerte, lineære operatorer.

1° Gør rede for:

(i) $(\forall n \in \mathbb{Z}: S\varepsilon_n = T\varepsilon_n) \Rightarrow S = T$,

(ii) $(\forall m,n \in \mathbb{Z}: (\varepsilon_m|S\varepsilon_n) = (\varepsilon_m|T\varepsilon_n)) \Rightarrow S = T$,

(iii) $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\|T\varepsilon_n\|_2^2 = \Sigma_{m,n\in\mathbb{Z}}|(\varepsilon_m|T\varepsilon_n)|^2$.

Lad T være Hilbert/Schmidt operatoren med kerne $k \in L^2(I\times I)$. For $f \in L^2(I)$ er altså

$$Tf(x) = \int_0^{2\pi} k(x,y)f(y)dy \quad \text{for næsten alle } x \in I .$$

2° Gør rede for:

(i) $k = \Sigma_{m,n\in\mathbb{Z}}((\varepsilon_m|T\varepsilon_n)\cdot(\varepsilon_m\otimes\overline{\varepsilon_n}))$,

(ii) $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\|T\varepsilon_n\|_2^2 = \int_{I\times I}|k(x,y)|^2\,dxdy$.

Her er (i) således at forstå, at rækken (med leddene ordnet i en vilkårlig rækkefølge) er konvergent i $L^2(I\times I)$ med sum k.

(Opgaven fortsættes)

Københavns Universitet

Matematik 2, første sæt

Vinteren 1972-73

Det antages, at $\Sigma_{n \in Z} \|S\varepsilon_n\|_2^2 < \infty$.

3° Bevis, at S er en Hilbert/Schmidt operator.