Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1972

MATEMATIK 2 - (MATEMATIK C)

Skriftlig prøve 2

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Eksamen afholdes den 25. maj kl. 9-13.

Opgave nr. 1.

Lad $\mathcal{S}$ være en σ-algebra i en mængde E og lad $f_1, f_2, \ldots$ være reelle funktioner defineret på E, målelige med hensyn til $\mathcal{S}$.

Vis, at $\{x \in E \mid \sup_n f_n(x) < \infty\} \in \mathcal{S}$.

Opgave nr. 2.

Lebesgue målet af enhedskuglen

$$\{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$$

i $\mathbb{R}^3$ er $4\pi/3$.

Find Lebesgue målet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^4$.

Opgave nr. 3.

1° Vis, at FG er absolut kontinuert i $[a,b]$, når F

(Opgaven fortsættes)

og G er det.

2° Lad $f \in L([a,b])$. Gør rede for, at der findes en funktion $h \in L([a,b])$, således at

$$\forall x \in [a,b]: \quad \left(\int_a^x f(t)dt\right)^2 = \int_a^x h(t)dt \; .$$

Opgave nr. 4.

Lad $f \in L^p(\dot{R})$ og $g \in L^p(\dot{R})$, hvor $1 \leqq p < \infty$, og lad $f \otimes g$ betegne funktionen

$$(x,y) \to f(x)g(y), \quad (x,y) \in \dot{R} \times \dot{R} \; .$$

Gør rede for, at $f \otimes g \in L^p(\dot{R} \times \dot{R})$, og bestem $\|f \otimes g\|_p$.

Opgave nr. 5.

1° Bestem Fourier rækken for funktionen f givet ved

$$f(x) = x, \quad x \in [0,2\pi[\; .$$

2° Idet $g \in L^2([0,2\pi[)$, skal man udtrykke $\int_0^{2\pi} xg(x)dx$ som sum af en række, hvor Fourier koefficienter for g indgår i leddene.

(forts.)

Københavns universitet

Sommeren 1972

Mat. 2 - (Mat. C)

Opgave nr. 6.

Lad H være et komplekst Hilbert rum, og lad $x \in H$.

1° Idet $e \in H$, $\|e\| = 1$, skal man bestemme den ortogonale projektion af x på underrummet $\{\lambda e \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

2° Lad M være et afsluttet underrum af H og antag $Px \neq 0$, hvor Px er den ortogonale projektion af x på M. Find

$$k = \sup \{ |(e|x)| \mid e \in M, \|e\| = 1 \}$$

og bestem $$\{e \in M, \|e\| = 1 \mid |(e|x)| = k\}.$$

(Med $(e|x)$ betegnes skalarproduktet af e og x.)

Opgave nr. 7.

Lad μ være et mål i en mængde E, lad $f: E \to \mathbb{C}$ tilhøre $L^p(\mu)$, hvor $1 < p < \infty$, og lad $1/p + 1/q = 1$.

1° Vis, at $|f|^{p-1} \in L^q(\mu)$, og bestem $\| |f|^{p-1} \|_q$.

2° Gør rede for, at der ved

$$Tg = \int_E fg \, d\mu, \quad g \in L^q(\mu),$$

defineres en kontinuert, lineær funktional $T: L^q(\mu) \to \mathbb{C}$,

(Opgaven fortsættes)

og bestem operatornormen $\|T\|$.

Opgave nr. 8.

Lad $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$.

1° Find kurveintegralet

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)(z-1/a)}\, dz ,$$

hvor $C(0,1)$ er enhedscirklen i $\mathbb{C}$, med positivt omløb.

2° Find

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos t + a^2}\, dt .$$

Opgave nr. 9.

1° Formuler Rouchés sætning.

2° Om polynomiet $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ med komplekse koefficienter er givet, at det har netop n forskellige nulpunkter i $\mathbb{C}$. Vis, at denne egenskab bevares ved tilstrækkeligt små ændringer af koefficienterne.