Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1972

MATEMATIK 2, første sæt

Opgaver til besvarelse i 4 timer

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1.

(Både A) og B) ønskes løst)

A) Idet p betegner et primtal, skal man vise, at antallet af irreducible moniske polynomier af anden grad over legemet $(\mathbb{Z}_p,+,.)$ er lig $\frac{1}{2}p(p-1)$.

Elementerne i $(\mathbb{Z}_3,+,.)$ betegnes 0, e og $-e$. Angiv de irreducible moniske polynomier af anden grad i $\mathbb{Z}_3[X]$.

Benyt det fundne om $\mathbb{Z}_3[X]$ til at vise, at for ethvert $h \in \mathbb{Z}$ er polynomiet $X^4+X^3+X^2+3hX+1$ **irreducibelt** over $\mathbb{Q}$.

B) Lad G være en endelig gruppe med undergrupper H og K. I noterne er vist at $\text{ord}(H \cap K)\cdot\text{ord } G \geq \text{ord } H \cdot \text{ord } K$. Gør rede for at dersom lighedstegnet gælder, så er $G = KH = HK$ (idet AB som bekendt betegner $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$).

(Forts.)

Vis også, at betingelsen $G = KH = HK$ er tilstrækkelig til at lighedstegnet gælder (f.eks. ved på passende måde at optælle elementerne).

Opgave nr. 2.

Lad $(M,+,.)$ være en ring, hvor det for ethvert element a gælder at

$$a^2 = a. \qquad (H)$$

1) Vis, at for alle a er $2a = 0$, og vis, at ringen er kommutativ (man kan f.eks. indsætte $a+b$ i (H)). Bevis, at dersom ringen er et legeme, så er det isomorft med $(Z_2,+,.)$.

2) Man betragter maximalidealer I i $(M,+,.)$. Ethvert I er en undergruppe i $(M,+)$, hvad er dens index? Lad $\mathcal{J}$ være mængden af maximalidealer i $(M,+,.)$, og lad $P(\mathcal{J})$ betegne mængden af delmængder af $\mathcal{J}$. Idet kompositionsreglen Δ defineres ved

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B)\setminus(A \cap B) \qquad \text{for } A,B \in P(\mathcal{J})$$

bliver $(P(\mathcal{J}),\Delta,\cap)$ en kommutativ ring (ønskes ikke bevist).

(Forts.)

Københavns universitet

Matematik 2, første sæt

Sommeren 1972

En afbildning $f: M \to P(\mathcal{J})$ defineres ved at

$$f(a) = \{I \mid a \notin I\}.$$

Godtgør, at f er en homomorf afbildning

$$(M,+,.) \to (P(\mathcal{J}),\Delta,\cap).$$

Opgave nr. 3.

Indikatorfunktionen for en mængde $A \subseteq \dot{R}$ betegnes 1_A. Translationen $t \to t + a$, $t \in \dot{R}$, givet ved $a \in \dot{R}$ betegnes τ_a.

Lad $B \subseteq \dot{R}$ være Lebesgue målelig med Lebesgue mål $\lambda(B) < \infty$.

1° Vis, at funktionen $f = 1_{-B} * 1_B$ er defineret overalt på $\dot{R}$, og at

$$\forall x \in \dot{R}: \quad f(x) = \lambda(B \cap \tau_x(B)) .$$

2° Gør rede for, at $f \in L(\dot{R})$, og find $\int_{\dot{R}} f(x)dx$.

3° Idet $B - B = \{y - z \mid y \in B,\ z \in B\}$, skal man vise, at

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in B - B ,$$

samt at hvis $\lambda(B) > 0$, så er 0 indre punkt for $B - B$ i $\dot{R}$.

(Forts.)

Københavns universitet

Matematik 2, første sæt

Sommeren 1972

4° Gør rede for, at den Fourier transformerede $\hat{1}_B$ tilhører $L^2(\hat{R})$, og vis

$$\forall x \in \hat{R}: \quad f(x) = 2\pi \int_{\hat{R}} |\hat{1}_B(t)|^2 e^{itx}\, dt \, .$$