Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1971-72

MATEMATIK 2 - (MATEMATIK C)

Skriftlig prøve 2

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Eksamen afholdes den 20. januar kl. 9-13.

Opgave nr. 1

Lad ν være et mål på mængden af Borel mængder i $\mathring{R}^d$, og antag at $\nu(I) < \infty$ for ethvert interval I. (Med interval menes begrænset interval.)

1° Idet I^* er et interval af form

$$I^* = \{(x_1,\ldots,x_d) \mid a_i < x_i \leqq b_i \text{ , } i=1,\ldots d\} ,$$

skal man vise, at

$$\nu(I^*) = \inf \{\nu(I) \mid I^* \subseteq I, \text{ I åbent interval}\} .$$

2° Idet B er en vilkårlig Borel mængde, skal man vise, at

$$\nu(B) = \inf \{\nu(G) \mid B \subseteq G, \text{ G åben mængde}\} .$$

Opgave nr. 2

Lad $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathring{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{for } 0 \leqq x < y \leqq 1 \\ -x^{-2} & \text{for } 0 \leqq y < x \leqq 1 \\ 0 & \text{for } 0 \leqq x = y \leqq 1 \end{cases} .$$

(Opgaven fortsættes)

Opgave 2 fortsat.

1° Find værdien af hvert af dobbeltintegralerne

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy \quad , \quad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx \; .$$

2° Er f Lebesgue integrabel ?

Opgave nr. 3

Idet $f: [0,\infty[\to \hat{\mathbb{R}}$ er Lebesgue integrabel på $[0,t]$ for hvert $t \in]0,\infty]$, og

$$s(t) = \int_0^t f(x)dx \quad \text{for} \quad t \in [0,\infty[\; ,$$

$$\sigma(T) = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \quad \text{for} \quad T \in [0,\infty[\; ,$$

skal man vise:

1° $$\sigma(T) = \int_0^T (1 - \frac{x}{T})f(x)dx \quad \text{for} \quad T \in [0,\infty[\; .$$

2° Hvis $s(t) \to A$ for $t \to \infty$, så $\sigma(T) \to A$ for $T \to \infty$.

Opgave nr. 4

Lad $e_1, e_2, \ldots$ være en ortonormal følge i et Hilbert rum H, lad $x \in H$, og sæt $\lambda_n = (e_n, x)$, $n = 1,2,\ldots$.

Bevis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ er konvergent, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ er konvergent i H, og at

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \right\| = \|x\| \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \; .$$

(Forts.)

Opgave nr. 5

Lad $(V, \|\cdot\|)$ være et Banach rum, og lad $(\mathscr{L}(V), \|\cdot\|)$ være rummet af kontinuerte lineære operatorer af V ind i V.

Idet $T \in \mathscr{L}(V)$ med $\|T\| < 1$, skal man vise, at $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ er konvergent i $\mathscr{L}(V)$, samt at 1 tilhører resolventmængden $\rho(T)$ for T.

Opgave nr. 6

Lad operatoren $K\colon L^2(0,2\pi) \to L^2(0,2\pi)$ være givet ved

$$(Kf)(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x+y) f(y)\,dy \;.$$

1° Er K selvadjungeret ?

2° Bestem billedrummet, find samtlige egenværdier, og angiv en ortonormal basis for $L^2(0,2\pi)$ bestående af egenfunktioner for K.

3° Bestem $\|K\|$.

Opgave nr. 7

Rækken $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ er givet at være summabel $(C,1)$ i 1-middel i intervallet $]-\pi,\pi]$ med sum f.

1° Hvad menes hermed ? (Giv explicite udtryk for størrelser nævnt i svaret.)

2° Bevis, at $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er Fourier rækken for f.

(Forts.)

Københavns universitet
Vinteren 1971-72
Mat. 2 - (Mat. C)

Opgave nr. 8

Log er stamfunktion til $z \to \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \,]-\infty,0]$, med $\mathrm{Log}(1) = 0$.

1° Gør rede for, at

$$\mathrm{Log}(1+z) = \int_0^1 \frac{1}{1+zt}\, z\,dt \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \,]-\infty,-1] .$$

2° Bestem potensrækkeudviklingen for $\mathrm{Log}(1+z)$ ud fra 0, og bevis, at $\mathrm{Log}(1+z)$ fremstilles ved rækken, når $|z| \leqq 1$, $z \neq -1$.