Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1971-72

MATEMATIK 2, første sæt

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1
(Både A) og B) ønskes løst)

A) Lad $(M,+,\cdot)$ være en kommutativ ring med nulelement 0. For enhver delmængde A af M defineres delmængden A^* af M ved

$$A^* = \{x \mid xa = 0 \text{ for alle } a \in A\}.$$

Vis, at A^* er et ideal. Godtgør en relation mellem $(A^*)^*$ og A.

For et fast $a \in M$ og ethvert $j \in \mathbb{N}$ defineres I_j som $\{a^j\}^*$. Vis, at $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$, og vis, at $\bigcup_j I_j = M$ hvis og kun hvis a er nilpotent (d.v.s. hvis der findes et $k \in \mathbb{N}$ så $a^k = 0$).

B) Idet $n \in \mathbb{N}$ skal man gøre rede for at

$$p(X) = X^3 + (n+1)X + 2$$

er irreducibelt over $\mathbb{Q}$ og har netop én reel rod a. Angiv graden $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]$. Vis, at $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(5a^2)$, og endvidere at $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(a)$. Benyt dette til at bestemme graden $[\mathbb{Q}(a\sqrt{5}):\mathbb{Q}]$. Angiv $[\mathbb{Q}(a\sqrt{5},b,c):\mathbb{Q}]$, hvor b og c er de to andre rødder i $p(X)$.

(Forts.)

Opgave nr. 2

Lad $(G,\cdot)$ være en gruppe med en undergruppe A forskellig fra G. I det følgende betegner x et vilkårligt element af $G\setminus A$, og det vides, at for alle x er $H_x = A \cup \{x,x^{-1}\}$ en undergruppe i G.

1) Vis, at ord A er 1 eller 2.

2) Her betragtes tilfældet ord $A = 1$. Bestem de mulige talværdier for ord x. Angiv strukturen af gruppen G, når G er abelsk og ord G er 16. Bevis, at dersom det forlanges at ord $G = 12$, så kan G ikke være abelsk; findes et ikke-abelsk G med ord $G = 12$?

3) Vis, at i en abelsk gruppe er antallet af løsninger til ligningen $y^2 = c$ enten lig 0 eller lig antallet af løsninger til $y^2 = e$, hvor e er etelementet.

4) Her betragtes tilfældet ord $A = 2$. Gør rede for at der er netop én realiserbar mulighed for talværdien af ord x. Benyt resultatet fra spørgsmål 3) til at bestemme hvilken orden og struktur G må have, når G er abelsk.

Opgave nr. 3

Lad $f: \mathring{R} \to \mathring{R}$ være givet ved

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in \mathring{R} .$$

1° Gør rede for, at $f \in L^2(-\infty,\infty)$, men $f \notin L(-\infty,\infty)$.

(Opgaven forts.)

2° Beregn

$$\int_{k_n} \frac{z \cdot \exp(-itz)}{1+z^2} dz ,$$

hvor $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, og k_n er randen af kvadratet med vinkelspidser $\pm n$, $\pm n - 2in$, med negativ omløbsretning.

3° Vis, at $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x) \exp(-itx)\, dx$ eksisterer for hvert $t \in \mathbb{R}_+$, og angiv værdien.
(Vink: Vurdér de tre af bidragene til integralet i 2° med brug af

$$M_n = \sup \left| \frac{z}{1+z^2} \right| ,$$

hvor supremum er taget over $z \in k_n$, $z \notin \mathbb{R}$.)

4° Bestem den transformerede $\mathcal{F}f$ af f ved Fourier-Plancherel operatoren $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.