Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1971

MATEMATIK 2 - (MATEMATIK C)

Skriftlig prøve 2

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Eksamen afholdes den 2.6. 1971 kl. 14-18.

Opgave nr. 1

Lad $f \in L(\mathbb{R}_+, \mu)$, hvor μ er et Lebesgue/Stieltjes mål.

Vis, at $$\int_0^x f d\mu \to \int_{\mathbb{R}_+} f d\mu \quad \text{for } x \to \infty .$$

Opgave nr. 2

Lad $a \in \mathbb{R}_+$. Vis, at for hver funktion $g \in L(\mathbb{R}^d)$ vil også $M_a g \in L(\mathbb{R}^d)$ med

$$\int_{\mathbb{R}^d} M_a g = \int_{\mathbb{R}^d} g ,$$

idet $M_a g$ er givet ved $M_a g(x) = a^d g(ax)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Opgave nr. 3

Formuler Hölders ulighed.

Lad (E, μ) være et målrum med $0 < \mu(E) < \infty$ og lad $1 < p < \infty$. Vis, at $L^p(E, \mu) \subseteq L(E, \mu)$, samt at den identiske afbildning af $L^p(E, \mu)$ er en begrænset lineær afbildning af $L^p(E, \mu)$ med $\| \ \|_p$

(Opgave nr. 3 fortsættes)

ind i $L(E, \mu)$ med $\| \ \|_1$. Bestem afbildningens norm.

Opgave nr. 4

Operatoren $T: L^2(-\pi, \pi) \to L^2(-\pi, \pi)$ afbilder $f \in L^2(-\pi, \pi)$ i funktionen $x \to f(x)e^{ix}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Find den adjungerede operator T^*, samt en med T unitær ækvivalent operator $S: l^2_Z \to l^2_Z$.

Opgave nr. 5

Lad H være et uendelig-dimensionalt Hilbert rum.
Vis, at den identiske operator $I: H \to H$ ikke er kompakt.
Lad $T: H \to H$ være en kompakt operator. Vis, at 0 tilhører spektret $\sigma(T)$. Giv et eksempel, hvor 0 ikke er egenværdi for T.

Opgave nr. 6

Lad $f \in L(\mathring{R})$. Bevis under passende forudsætninger om funktionen g, at $f * g$ er differentiabel, og find et udtryk for den afledede $D(f * g)$.

Opgave nr. 7

Definer Fejérs kerne $F_n(t)$. Gør rede for, hvorledes den kommer ind i undersøgelsen af Fourier rækken for en vilkårlig funktion

(Opgave nr. 7 fortsættes)

Københavns Universitet, sommeren 1971.
Matematik 2 - (Matematik C)

$f \in L(-\pi, \pi)$. Udled dens vigtigste egenskaber.

Opgave nr. 8

Find værdien af

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)(z^2+1)} ,$$

hvor C er cirkellinien $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| = \sqrt{2}\}$ med positivt omløb.

Opgave nr. 9

Lad $f\colon A \to \mathbb{C}$ være holomorf i en åben, sammenhængende mængde $A \supset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Vis, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|f^{(n)}(0)|/n!)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})|^2 dx.$$

Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at

$$|f^{(7)}(0)| = 7!M ,$$

hvor $M = \max \{|f(z)| \mid |z| = 1\}$.