Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1970/71

MATEMATIK 2 - (MATEMATIK C)

Skriftlig prøve 2

Hjælpemidler kan ikke medbringes.
Eksamen afholdes den 7.1.1971 kl. 14-18.

## Opgave nr. 1

Vis at enhver Borelmængde i $\mathring{R}$, som har Lebesguemålet 0, er indeholdt i en større Borelmængde med Lebesguemål 0.

Angiv et mål på Borelmængderne i $\mathring{R}$, for hvilket der findes en største nulmængde.

## Opgave nr. 2

Vis at funktionen $(x,y) \to \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ er harmonisk i $\mathring{R}^2 \setminus \{0,0\}$, og angiv en konjugeret funktion i halvplanen $\{(x,y) \in \mathring{R}^2 | x > 0\}$.

## Opgave nr. 3

Lad $\{f_n\}$ være en følge af absolut kontinuerte funktioner på $[0,1]$, således at $f_n(0) = 0$ og $\|f_n'\|_\infty \leq 1$ for $n = 0,1,2 \ldots$ .

Vis at hvis $f_n'(x) \to f_o'(x)$ for næsten alle $x$, så vil $f_n \to f_o$ uniformt på $[0,1]$.

(Opgavesættet fortsættes)

Mat. 2+C, prøve 2, vinteren 1970/71.

## Opgave nr. 4

Lad $T$ være den operator på $L^2(-\pi,\pi)$, for hvilken

$Tf(x) = xf(x)$, når $f \in L^2(-\pi,\pi)$.

Vis at $T$ er selvadjungeret og find $\|T\|$.

## Opgave nr. 5

Lad $f$ være en kontinuert funktion på $\mathbb{R}$, med kompakt støtte.

Gør rede for at den Fourier transformerede af $f$ tilhører $L^2(-\infty,\infty)$, og vis herved at den Fourier transformerede af $f*f$ er integrabel.

## Opgave nr. 6

Udregn integralet $\int_{\partial F}(z^2+4z+1)^{-1}dz$ hvor

$F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Find herved værdien af integralet $\int_0^{2\pi}(4+2\cos x)^{-1}dx$.

## Opgave nr. 7

Bevis at funktionen $(x,y) \to (1-xy)^{-\frac{1}{2}}$ er Lebesgueintegrabel på $]0,1[ \times ]0,1[$.

## Opgave nr. 8

Lad $S$ og $T$ være kontinuerte, lineære operatorer på Hilbertrummet $H$, således at $S^{-1}$ er kontinuert.

Vis at $ST$ og $TS$ har de samme egenværdier.

(Opgavesættet fortsættes)

Mat. 2+C, prøve 2, vinteren 1970/71.

## Opgave nr. 9

Bestem de $\alpha > 0$ for hvilke funktionen

$$x \to (x(1 + (\log x)^2))^{-\alpha}$$

er Lebesgue integrabel på $]0,\infty[$.

## Opgave nr. 10

Funktionen $f$ antages holomorf i et åbent område, der indeholder mængden $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Vis at hvis $|f(z)| \leq 1$ for $|z| = 1$ og $f^{(p)}(0) = 0$ for $p = 0,1,\ldots,n-1$, så gælder $|f(z)| \leq |z|^n$ for $|z| \leq 1$.

Vink: Betragt funktionen $f(z)z^{-n}$.

## Opgave nr. 11

Vis at hvis det for en funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gælder, at for enhver Borelfunktion $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ er den sammensatte funktion $g\circ f$ en Borelfunktion, så vil $f^{-1}(A)$ være en Borelmængde hvis $A$ er en Borelmængde.