Københavns universitet

NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN

Vinteren 1970/71

MATEMATIK 2

Skriftlig prøve 1

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 4.1.1971 kl. 9-13

Opgave nr. 1

(Både A) og B) ønskes løst)

A) Vis, at hvis polynomiet $X^4 + c X^2 + d^2$, hvor c og d tilhører et kommutativt legeme $(M,+,\cdot)$, er reducibelt over M, så er det produkt af to andengradspolynomier over M.

I det følgende antages, at karakteristikken for M er forskellig fra 2. Vis, at polynomiet er reducibelt hvis, og kun hvis, mindst et af elementerne $c^2 - 4d^2$, $2d - c$, $-2d - c$ er et kvadrat.

Vis ved hjælp heraf, at $X^4 - 2X^2 + 4$ er irreducibelt over $\mathbb{Z}$; vis også, at betragtet som polynomium over $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ er $X^4 - 2X^2 + 4e$ (hvor e betegner etelementet) reducibelt, og skriv det som produkt af to andengradspolynomier.

B) En endelig abelsk gruppe har invarianterne 5^2 og 5. Hvor mange elementer af orden 5 har den, og hvor mange undergrupper af orden 5 ?

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet
Mat. 2, vinteren 1970/71, første prøve

Opgave nr. 2

Lad $\{f_n\}$ være en følge af Lebesgue integrable funktioner på $\mathbb{R}^d$, således at $\|f_o - f_n\|_1 < 4^{-n}\varepsilon$ for alle n.

(a) Find for ethvert n en øvre grænse for Lebesgue målet af mængden

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f_o(x) - f_n(x)| > 2^{-n}\}.$$

(b) Vis at følgen $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mod f_o på en (målelig) mængde B således at $\lambda(\mathbb{R}^d \setminus B) < \varepsilon$.

(c) Vis, under brug af det foregående, at for enhver Lebesgue integrabel funktion f_o på $\mathbb{R}^d$ og ethvert $\varepsilon > 0$ findes en målelig mængde B med $\lambda(\mathbb{R}^d \setminus B) < \varepsilon$, således at restriktionen af f_o til B er kontinuert.

Opgave nr. 3

Ved $\mathbb{Z}[3i]$ forstås delringen af $(\mathbb{C},+,\cdot)$ bestående af elementerne $\{x + 3iy \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$. Er $\mathbb{Z}[3i]$ en hovedidealring ?
Lad J være et ikke-trivielt ideal i $\mathbb{Z}[3i]$ og lad I betegne det mindste ideal i Gauss' ring $\mathbb{Z}[i]$, således at $I \supseteq J$. Vis, at $I = \{\Sigma\, zv\}$, hvor $\Sigma\, zv$ betegner en endelig sum af led zv med $z \in \mathbb{Z}[I]$ og $v \in J$. Vis, at $J \supset K$, hvor $K = \{3w \mid w \in I\}$. Godtgør, at det har mening at tale om kvotientringene $(I,+,\cdot)/K$ og $(J,+,\cdot)/K$, og vis at der kun er to muligheder - som ønskes angivet - for elementantallet i $(J,+,\cdot)/K$.
Vis, at $J_1 = \{x + 3iy \mid x,y \in \mathbb{Z},\ x-y \text{ lige}\}$ er et ideal i $\mathbb{Z}[3i]$. Angiv et ideal J_2, således at J_1 og J_2 er eksempler på begge de to omtalte muligheder.