Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1970

MATEMATIK 2 (Ny ordning)

Skriftlig prøve 2 og

MATEMATIK C (Ny ordning)

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Eksamen afholdes den 22. juni kl. 10-14.

Opgave nr. 1

Lad $\{x_n \mid -\infty < n < \infty\}$ være en orthonormal basis for Hilbert rummet H. For enhver vektor x i H med $x = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n x_n$ defineres

$$Tx = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n+1} x_n .$$

Vis at T er en isometrisk afbildning af H på H, og at T ikke har nogen egenværdier.

Opgave nr. 2

Lad $\mathcal{B}$ betegne systemet af Borel mængder i $\dot{R}$ og lad μ være et mål på $\mathcal{B}$ således at $\mu(B) < \infty$ for enhver begrænset Borelmængde B. Antag at for enhver mængde A i $\mathcal{B}$ er $\mu(A) = \sup \mu(K)$, hvor supremum tages over alle kompakte mængder K indeholdt i A.

Vis at for enhver begrænset mængde A i $\mathcal{B}$ er $\mu(A) = \inf \mu(G)$, hvor infimum tages over alle åbne mængder G som indeholder A.

Opgave nr. 3

Formuler Cauchy's residuesætning.

(Opgavesættet forts.)

Københavns universitet
Mat. 2 og C (Ny ordning), sommeren 1970

Opgave nr. 4

Lad f være en positiv, Lebesgue målelig funktion på $[0,\infty[$, således at $e^x f(x)$ er integrabel på $[0,\infty[$ med $\int_0^\infty e^x f(x)dx = 1$.

Vis at $(1 + \frac{x}{n})^n f(x)$ er integrabel på $[0,\infty[$ for ethvert naturligt tal n. Vis at talfølgen $\{\int_0^\infty (1 + \frac{x}{n})^n f(x)dx\}$ er konvergent, og angiv grænseværdien.

Opgave nr. 5

Lad $f: A \to \mathbb{C}$ være en holomorf funktion på et åbent område A, der indeholder halvplanen $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z \geq 0\}$. Antag at $|f(z)| \leq 1$ for $\text{Re } z = 0$, og $f(z) \to 0$ når $z \to \infty$ indenfor A.

Vis at $|f(z)| \leq 1$ for $\text{Re } z \geq 0$.

Opgave nr. 6

Lad M være en begrænset, åben, konveks delmængde af et reelt Banach rum V med norm $\|\cdot\|$, således at $0 \in M$, og $-x \in M$ hvis $x \in M$. For ethvert x i V defineres

$$|||x||| = \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in M\}.$$

Gør rede for at $|||\cdot|||$ definerer en norm på V.

Opgave nr. 7

Vis at funktionen $x \to \log x$, hvor $x \in]0,1]$, tilhører $L^p([0,1],\mathcal{L},\lambda)$ for $1 \leq p < \infty$, men ikke for $p = \infty$.

(Opgavesættet forts.)

Københavns universitet
Mat. 2 og C (Ny ordning), sommeren 1970.

Opgave nr. 8

Lad f være en Lebesgue integrabel funktion på $[0,2\pi]$. For ethvert z i $\mathbb{C}$ med $|z| < 1$ defineres

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{it}-z)^{-1}f(t)e^{it}dt.$$

Vis at g er holomorf i området $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Opgave nr. 9

Funktionerne $k_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givne ved

$$k_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2}, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

Gør rede for at $k_n * f \to f$ uniformt på $\mathbb{R}$ for enhver begrænset, uniformt kontinuert funktion f på $\mathbb{R}$.
Vink: Det er givet at $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Opgave nr. 10

Lad T være en selv-adjungeret, kompakt operator på det separable Hilbert rum H, således at $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.
Vis at følgen $\{T^n\}$ konvergerer uniformt i $\mathcal{L}(H)$ mod en projektion P, hvor P(H) har endelig dimension.