Københavns univ

<u>Naturvide ,lig embedseksamen, sommeren 1970</u>

MATEMATIK 2, Gl. ordning

Skriftlig prøve 2 og

MATEMATIK C, Gl. ordning

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Eksamen afholdes den 22. juni kl. 10-14.

Opgave nr. 1

Angiv maksimum af funktionen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ på mængden F, når $f(x,y,z) = xyz$, og

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{x^2} + e^{y^2} = 4, \quad z = 2\}.$$

Opgave nr. 2

Vis at den harmoniske række $\sum_0^\infty \frac{1}{n+1}$ ikke er summabel.

Opgave nr. 3

Formuler Cauchy's residuesætning.

Opgave nr. 4

Lad f være en positiv, Lebesgue målelig funktion på $[0,\infty[$, således at $e^x f(x)$ er integrabel på $[0,\infty]$ med $\int_0^\infty e^x f(x)dx = 1$. Vis at $(1 + \frac{x}{n})^n f(x)$ er integrabel på $[0,\infty[$ for ethvert naturligt tal n. Vis at talfølgen $\{\int_0^\infty (1 + \frac{x}{n})^n f(x)dx\}$ er konvergent, og angiv grænseværdien.

(Opgavesættet forts.)

Københavns universitet
Mat. 2 og C, Gl. ordning, sommeren 1970.

Opgave nr. 5

Lad $f: A \to \mathbb{C}$ være en holomorf funktion på et åbent område A, der indeholder halvplanen $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$. Antag at $|f(z)| \leq 1$ for $\mathrm{Re}\, z = 0$, og $f(z) \to 0$ når $z \to \infty$ indenfor A.
Vis at $|f(z)| \leq 1$ for $\mathrm{Re}\, z \geq 0$.

Opgave nr. 6

Lad M være en begrænset, åben delmængde af et reelt Banach rum V med norm $\|\cdot\|$, således at

(a) $0 \in M$.

(b) $-f \in M$ hvis $f \in M$.

(c) $\lambda f + (1-\lambda)g \in M$ for alle f, g i M og $0 \leq \lambda \leq 1$.

For ethvert f i V defineres

$$|||f||| = \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1} f \in M\}.$$

Gør rede for at $|||\cdot|||$ definerer en norm på V.

Opgave nr. 7

Vis at funktionen $x \to \log x$, hvor $x \in]0,1]$, tilhører $\mathcal{L}^p([0,1])$ for $1 \leq p < \infty$, men ikke for $p = \infty$.

Opgave nr. 8

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion.
Find målet (i $\mathbb{R}^2$) af mængden $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Vink: Anvend f.eks. Fubini's sætning.

(Opgavesættet forts.)

Københavns universitet
Mat. 2 og C, Gl. ordning, sommeren 1970.

Opgave nr. 9

Lad $u: A \to \mathbb{R}$ være en ikke konstant, harmonisk funktion på en åben, sammenhængende mængde $A \subseteq \mathbb{C}$.
Vis at u afbilder åbne mængder i A på åbne mængder i $\mathbb{R}$.

Opgave nr. 10

Lad $F(x,t)$ være en reel funktion på $\mathbb{R}^2$, således at
(a) $F(x,t)$ er integrabel i x for ethvert fast t.
(b) $F(x,t)$ er differentiabel i t for ethvert fast x.
(c) Der findes en integrabel funktion h på $\mathbb{R}$, således at
$|F_t'(x,t)| \leqq h(x)$ for alle t.

Vis at funktionen f givet ved $f(t) = \int F(x,t)dx$ er differentiabel, med $f'(t) = \int F_t'(x,t)dx$.
Vink: Betragt funktionsfølger $\{g_n\}$, hvor
$g_n(x) = s_n^{-1}\,[F(x,t_o + s_n) - F(x,t_o)]$ og hvor $s_n \to 0$.