Københavns universitet

NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN

Sommeren 1970

MATEMATIK 2, (Ny ordning)

Skriftlig prøve 1

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 15. juni kl. 14-18.

Opgave nr. 1

A) Man betragter grupper H, hvis orden er $n = pq$, hvor p og q er forskellige primtal. Gør kort rede for at hvis H er abelsk, så er den cyklisk, og angiv dens invarianter.
Vis, at antallet af elementer af orden p er deleligt med p-1 (man kan betragte fællesmængden af to undergrupper af orden p, hvis sådanne findes). Vis, at hvis $n = 35$, vil der altid eksistere undergrupper af orden 5 og af orden 7. Vis endvidere, at der er netop én undergruppe af orden 7.
Eksisterer der ikke-abelske grupper hvis orden er produkt af 2 forskellige primtal?

B) Man betragter polynomier $a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$, hvor $a_0 \in \mathbb{Z}$, og de øvrige koefficienter er lige tal. Vis, at mængden af disse polynomier udgør en ring. Angiv eksempler på irreducible elementer i ringen.
For et givet $m \in \mathbb{N}$ ønskes undersøgt om mængden B_m af polynomier for hvilke a_j lige for $0 \leq j \leq m$ og a_j delelig med 4 for $j > m$ udgør et ideal i ringen.
Har ringen den opstigende kædes egenskab?

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet
Mat. 2, (Ny ordning), sommeren 1970

Opgave nr. 2

Lad c betegne en rod i polynomiet $a(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 2$. Vis, at c ikke er rational. Hvad kan man heraf slutte om graden $[\mathbb{Q}(c):\mathbb{Q}]$? Man sætter $c^3-c^2 = d$. Vis udfra det foregående, at betragtet som polynomium over $\mathbb{Q}(d)$ er $X^3 - X^2 - d$ reducibelt.

Vis, at $d(d+4) \in \mathbb{Q}$, og angiv graden $[\mathbb{Q}(d):\mathbb{Q}]$. Idet det opgives, at $b(X) = X^3 - X^2 - d$ har en rod af formen $q + \frac{d}{2}$, hvor $q \in \mathbb{Q}$, ønskes q bestemt. Er de to andre rødder i $b(X)$ reelle?

Gør rede for om $a(X)$ er reducibel.

Opgave nr. 3

Lad f være en funktion i $L^2(\mathbb{R})$ og sæt

$$f_n = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*(f)\cdot 1_{[-n,n]}), \quad n = 1,2,\dots .$$

(a) Vis at $\|f-f_n\|_2 \to 0$ for $n \to \infty$.

(b) Vis at $\|f^2-f_n^2\|_1 \to 0$ for $n \to \infty$.

(c) Vis at $\mathcal{F}^*(f_n) \in L^1(\mathbb{R})$.

(d) Sæt $h_n = \mathcal{F}^*(f_n) * \mathcal{F}^*(f_n)$ og vis, at h_n er ækvivalent med en kontinuert funktion $\tilde{h}_n$, således at $\tilde{h}_n(t) \to 0$ for $t \to \pm\infty$.

(e) Vis at følgen $\{\tilde{h}_n\}$ konvergerer uniformt på $\mathbb{R}$ mod funktionen g givet ved $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)^2 e^{ixt}\, dx$.