Københavns universitet

NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN

Sommeren 1970

MATEMATIK 2, Gl. ordning

Skriftlig prøve 1

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Eksamen afholdes den 15. juni kl. 14-18.

Opgave nr. 1

A) Koordinaterne i et 3-dimensionalt euklidisk rum hedder x, y og z. Bestem centrum for kvadrikken Q:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2x - 2 = 0.$$

Angiv arten af Q og af de kvadrikker, der fremkommer ved Q's skæring med koordinatplanerne. Bestem den korteste afstand fra Q's centrum til Q.

B) Man betragter polynomier $a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$, hvor $a_0 \in \mathbb{Z}$, og de øvrige koefficienter er lige tal. Vis, at mængden af disse polynomier udgør en ring. Angiv eksempler på irreducible elementer i ringen.

For et givet $m \in \mathbb{N}$ ønskes undersøgt om mængden B_m af polynomier for hvilke a_j lige for $0 \leqq j \leqq m$ og a_j delelig med 4 for $j > m$ udgør et ideal i ringen.

Har ringen den opstigende kædes egenskab?

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet
Mat. 2, Gl. ordning, sommeren 1970

Opgave nr. 2

Lad c betegne en rod i polynomiet $a(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 2$. Vis, at c ikke er rational. Hvad kan man heraf slutte om graden $[\mathbb{Q}(c): \mathbb{Q}]$? Man sætter $c^3 - c^2 = d$. Vis udfra det foregående, at betragtet som polynomium over $\mathbb{Q}(d)$ er $X^3 - X^2 - d$ reducibelt.

Vis, at $d(d+4) \in \mathbb{Q}$, og angiv graden $[\mathbb{Q}(d): \mathbb{Q}]$. Idet det opgives, at $b(X) = X^3 - X^2 - d$ har en rod af formen $q + \frac{d}{2}$, hvor $q \in \mathbb{Q}$, ønskes q bestemt. Er de to andre rødder i $b(X)$ reelle?

Gør rede for om $a(X)$ er reducibel.

Opgave nr. 3

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion og lad $\underline{\underline{A}}$ være en 4×4 matrix og $\underline{x}_0$ en vektor i $\mathbb{R}^4$.

(a) Vis at funktionen $\underline{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ givet ved

$$\underline{\varphi}(t)| = [\exp(\underline{\underline{A}}\, f(t))]\underline{x}_0|$$

er differentiabel, og angiv funktionalmatricen.

(b) Antag nu at

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Find den løsning til differentialligningssystemet

$$\frac{d\underline{x}}{dt}| = t\underline{\underline{A}}\underline{x}|$$

som for $t = 0$ går gennem punktet $(1,0,0,0)$ i $\mathbb{R}^4$.

Vink: Vis først at $\underline{\underline{A}}$ er proportional med sit kvadrat.