Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Vinteren 1969-70.

M A T E M A T I K 2.

(M A T E M A T I K C)

Skriftlig prøve 2.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Eksamen afholdes den 9. januar kl. 10-14.

Opgave nr. 1.

Lad A være en åben, sammenhængende delmængde af $\grave{C}$, hvis afslutning $\bar{A}$ er kompakt. Vis at vektorrummet H af komplekse funktioner, som er definerede og kontinuerte på $\bar{A}$ og holomorfe på A, er et Banach rum med den uniforme norm
$\|f\| = \sup\{|f(z)| \mid z \in \bar{A}\}$.

Opgave nr. 2.

Betegnelser som i opgave nr. 1. Vis at for enhver funktion f i H findes et z i $\bar{A}\setminus A$ så $|f(z)| = \|f\|$.

Opgave nr. 3.

Lad p,q og r være reelle tal med $1 \leq p \leq q \leq r$. Vis at
$L_p(\grave{R}^k) \cap L_r(\grave{R}^k) \subset L_q(\grave{R}^k)$.

Opgave nr. 4.

Lad f og g være reelle funktioner på $\grave{R}$, således at g er integrabel og $\bar{I}(f) < \infty$. Vis at $\bar{I}(f+g) = \bar{I}(f) + I(g)$.

Opgave nr. 5.

Funktionen $f:A \to \grave{R}^2$ er defineret ved

$$(u,v) = f(x,y) = (\tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2),\quad \mathrm{Arctg}(yx^{-1}));$$

hvor $A = \{(x,y) \in \grave{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}$. Vis at f har en om-

(opgaven fortsættes)

vendt afbildning i en omegn af punktparret $(x,y) = (1,0)$; $(u,v) = (0,0)$. Gør rede for at f^{-1} er en C^1-funktion, og find de partielle afledede af f^{-1} i punktet $(u,v) = (0,0)$.

Opgave nr. 6.

Lad f være den meromorfe funktion givet ved $f(z) = z^{-2}$, $z \neq 0$. Find $\mathrm{Res}(f,z)$ for ethvert z i $\dot{C}$.

Opgave nr. 7.

Lad $f:[0,1] \to [0,\infty[$ være en målelig, begrænset funktion. Vis at funktionen $g(x) = (\int_0^1 f(t)^x \, dt)^{\frac{1}{x}}$ er kontinuert for $1 \leq x < \infty$.

Vink: Udnyt for eksempel Lebesgues sætning om absolut majoriseret konvergens.

Opgave nr. 8.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en skævsymmetrisk $n \times n$ matrix ($\underline{\underline{x}}_{-}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_{|} = 0$ for alle $\underline{\underline{x}}$). Vis at hvis $\underline{\underline{x}} = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ er en løsning til differentialligningen

$$\left(\frac{d\underline{\underline{x}}}{dt}\right)_{|} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_{|}$$

så er længden af vektoren $\underline{\underline{x}}$ (udregnet som $(\Sigma\, x_k^{\,2})^{\frac{1}{2}}$) uafhængig af t.

Opgave nr. 9.

Find arealet af området $\varphi(A)$ i $\dot{R}^2$, hvor A er mængden $\{(x,y) \in \dot{R}^2 \mid x > 1\}$; og $\varphi : A \to \dot{R}^2$ er givet ved

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) .$$

Vink: Brug eventuelt kompleks funktionsteori.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet

Mat.2+C, prøve 2.

Vinteren 1969-70.

Opgave nr. 10.

Formulér Lebesgue-Fubini's sætning om dobbeltintegraler.